对偶空间与对偶映射

张朝龙

在线性代数中，映射到标量域$\mathbf{F}$的线性映射具有非常重要的作用。

定义 *0.1* V上的线性泛函是从V到$\mathbf{F}$的线性映射。也就是说线性泛函是$\mathcal{L}(V,\mathbf{F})$中的元素。

例 *0.1* *1.* 定义$\phi:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$为$\phi(x,y,z)=4x-5y+2z$，则$\phi$是$\mathbf{R}^3$上的线性泛函。

2. 取定$(c_1,\ldots,c_n)\in\mathbf{F}^n$，定义$\phi:\mathbf{F}^n\to\mathbf{F}$为：$\phi(x_1,\ldots,x_n)=c_1x_x+\ldots c_nx_n$，则$\phi$是$\mathbf{F}^n$上的线性泛函。

3. 定义$\phi:\mathcal{P}(\mathbf{R})\to\mathbf{R}$为$\phi(p)=2p^{''}(5)+7p(4)$，则$\phi$是$\mathcal{P}(\mathbf{R})$上的线性泛函。

4. 定义$\phi:\mathcal{P}(\mathbf{R})\to\mathbf{R}$为$\phi(p)=\int_0^1 p(x)dx$，则$\phi$是$\mathcal{P}(\mathbf{R})$上的线性泛函。

定义 *0.2* V上的所有线性泛函构成的向量空间称为V的对偶空间，记为$V^{'}$。也就是说，$V^{'}=\mathcal{L}(V,\mathbf{F})$

定理 *0.1* $\dim V^{'}=\dim V$

证 我们之前 *3.61* 证明过：$\dim(\mathcal{L}(V,W))=(\dim V)(\dim W)$。

对于这个命题因为$V^{'}=\mathcal{L}(V,F)$，所以$\dim(V^{'})=\dim(V)\dim(\mathbf{F})$，又因为$\dim\mathbf{F}=1$.

这里$V^{'}$是线性泛函的集合，*(*线性泛函都是从V到$\mathbf{F}$的映射。*)* □

定义 *0.3* 设$v_1,\ldots,v_n$是V的基，则$v_1,\ldots,v_n$的对偶基是$V^{'}$中的元素组$\varphi_1,\ldots,\varphi_n$，其中每个$\varphi_j$都是$V$上的线性泛函，满足：

$$\varphi_j(v_k)=\begin{cases}1, & k=j\\ 0, & k\neq j\end{cases} \tag{0.1}$$

例 *0.2* 求$\mathbf{F}^n$的标准基$e_1,\ldots,e_n$的对偶基。

对于$1\leq j\leq n$，定义φ_j是$\mathbf{F}^n$上的线性泛函，满足$\forall(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{F}^n$*:*

$$\varphi_j(x_1,\ldots,x_n)=x^j \tag{0.2}$$

显然：

$$\varphi_j(v_k)=\begin{cases}1, & k=j\\ 0, & k\neq j\end{cases} \tag{0.3}$$

于是$\varphi_1,\dots,\varphi_n$是$\mathbf{F}^n$的标准基$e_1,\dots,e_n$的对偶基。

从对偶基的定义可以看出对偶基与V的基紧密相关，由于对偶基是$V^{'}$中满足特定条件的线性映射，根据定义，对偶基是把V的基的各个元素映射称1或者0的线性泛函的集合。注意对偶基是把V中的基映射为$\mathbf{F}$中的1而不是其他元素，所以可以想见这个对偶基在以后有很多特殊的应用。

定理 *0.2* 设V是有限维的，则V的一个基的对偶基是$V^{'}$的基。

证 还是从定义出发逐一解读这个命题的关键元素。

首先V是有限维的，说明V的维度有限。V的一个基的对偶基是$V^{'}$中的元素，这些元素是线性泛函，这些线性泛函把V的基映射称$\mathbf{F}$中的1或者0，另外注意：1是$\mathbf{F}$中的乘法单位元，0是$\mathbf{F}$中的加法零元。

所以我们假设$v_1,\dots,v_n$是V的基，则$V^{'}$的对偶基也有n个元素，假设为$\varphi_1,\dots,\varphi_n$。我们接下来要证明$\varphi_1,\dots,\varphi_n$是线性无关且张成$V^{'}$。

为了证明$\varphi_1,\dots,\varphi_n$是线性独立的，令:

$$0=a_1\varphi_1+\ldots+a_n\varphi_n \tag{0.4}$$

我们只要得到$a_i,\forall i$即可。注意上式左端的0是对偶空间中的0元素，是一个线性泛函。

对上式两端我们作用于v_i，显然有$0v_i=0=a_i\varphi_i(v_i)$．根据对偶基的定义，我们有$a_i\varphi_i(v_i)=a_i,a_j\varphi_j(v_i)=0,\forall j\neq i$.

所以$a_i=0,\forall i$

又因为，我们之前有$\dim V^{'}=\dim V$。而$\dim span(\varphi_1,\dots,\varphi_n)=n$，所以$\dim V^{'}=n$。

所以$\varphi_1,\dots,\varphi_n$是$V^{'}$的一组基（若$V^{'}$是有限维的，则$V^{'}$中每个长度为$\dim V^{'}$的线性无关向量组都是$V^{'}$的基）。 □

定义 *0.4* 若$T\in\mathcal{L}(V,W)$，则T的对偶映射是线性映射$T^{'}\in\mathcal{L}(W^{'},V^{'})$：对于$\varphi\in W^{'}$， $T^{'}(\varphi)=\varphi\circ T$

注意这里的$W^{'},V^{'}$分别是W,V上的所有线性泛函构成的向量空间，即W,V的对偶空间。$\varphi\in W^{'}$表明φ是从W到$\mathbf{F}$的线性映射。

如果$T\in\mathcal{L}(V,W)$， $\varphi\in W^{'}$，那么$T^{'}(\varphi)$被定义为线性映射φ与T的复合。于是，由于T是从V到W的线性映射，而φ是从W到$\mathbf{F}$的线性泛函。所以$\varphi\circ T$是

从V到$\mathbf{F}$的线性泛函，即 $T^{'}(\varphi)$的确是V到$\mathbf{F}$的线性映射。也就是说，$T^{'}(\varphi)\in V^{'}$

验证$T^{'}$是$W^{'}$到$V^{'}$的线性映射：

1. 若$\varphi,\phi\in W^{'}$，则$T^{'}(\phi+\varphi)=(\phi+\varphi)\circ T=\phi\circ T+\varphi\circ T=T^{'}(\phi)+T^{'}(\varphi)$
2. 若$\lambda\in\mathbf{F},\varphi\in W^{'}$，则$T^{'}(\lambda\varphi)=(\lambda\varphi)\circ T=\lambda(\varphi\circ T)=\lambda T^{'}(\varphi)$

在下面的例子中，$'$有两种毫不相干的意义：$D^{'}$表示线性映射D的对偶映射，$p^{'}$则表示多项式p的导数。

例 *0.3* 定义：$D:\mathcal{P}(\mathbf{R})\to\mathcal{P}(\mathbf{R})$为$Dp=p^{'}$

1. 设φ是$\mathcal{P}(\mathbf{R})$上由$\varphi(p)=p(3)$定义的线性泛函。则$D^{'}(\varphi)$是$\mathcal{P}(\mathbf{R})$上如下定义的线性泛函：

$$(D^{'}(\varphi))(p)=(\varphi\circ D)(p)=\varphi(Dp)=\varphi(p^{'})=p^{'}(3)$$

即：$D^{'}(\varphi)$是$\mathcal{P}(\mathbf{R})$上将p变成$p^{'}(3)$的线性泛函。

2. 设φ是$\mathcal{P}(\mathbf{R})$上由$\varphi(p)=\int_0^1 p(x)dx$定义的线性泛函。则$D^{'}(\varphi)$是$\mathcal{P}(\mathbf{R})$上如下定义的线性泛函：

$$(D^{'}(\varphi)(p))=(\varphi\circ D)(p)=\varphi(D(p))=\varphi(p^{'})=\int_0^1 p^{'}(x)dx=p(1)-p(0)$$

即：$D^{'}(\varphi)$是$\mathcal{P}(\mathbf{R})$上将p变为$p(1)-p(0)$的线性泛函。

对偶映射的代数性质：

1. 对所有$S,T\in\mathcal{L}(V,W)$有$(S+T)^{'}=S^{'}+T^{'}$
2. 对所有$\lambda\in\mathbf{F}$和所有$T\in\mathcal{L}(V,W)$，有$(\lambda T)^{'}=\lambda T^{'}$
3. 对所有$T\in\mathcal{L}(U,V)$和所有$S\in\mathcal{L}(V,W)$，有$(ST)^{'}=T^{'}S^{'}$

证 对于第一条，根据对偶映射的定义 *(***若$T\in\mathcal{L}(V,W)$,则T的对偶映射是线性映射$T^{'}\in\mathcal{L}(W^{'},V^{'})$:对于$\varphi\in W^{'},T^{'}(\varphi)=\varphi\circ T$***)*，对于$\varphi\in W^{'}$，有：

$$(S^{'}+T^{'})(\varphi)=\varphi\circ(S+T)=\varphi\circ S+\varphi\circ T=S^{'})(\varphi)+T^{'}(\varphi)=(S^{'}+T^{'})(\varphi)\quad(0.5)$$

对于第二条，同样根据对偶映射的定义*(*若$T\in\mathcal{L}(V,W)$,则T的对偶映射$T^{'}\in\mathcal{L}(W^{'},V^{'})$，对于$\varphi\in W^{'}$，有$T^{'}(\varphi)=\varphi\circ T$*)*，对于$\varphi\in W^{'}$，有：

$$(\lambda T)^{'}(\varphi)=\varphi\circ(\lambda T)=\lambda(\varphi\circ T)=\lambda(T^{'}(\varphi))\quad(0.6)$$

对于第三条：

假设有$\varphi \in W^{'}$，则有：

$$(ST)^{'}(\varphi) = \varphi \circ ST = (\varphi \circ S) \circ T = T^{'}(\varphi \circ S) = T^{'}(S^{'}(\varphi)) = T^{'}S^{'}(\varphi) \tag{0.7}$$

使用对偶映射的定义推导出第一个等号，使用映射的结合性推出第二个等号，使用对偶映射的定义推导出第三个等号，使用对偶映射的结合性对导出第四个等号，使用映射的结合性推出第五个等号。 □