对偶映射的矩阵以及矩阵的秩

张朝龙

目录

我非常喜欢《linear algebra done right》这本书。其原因之一是这本书从头到尾都不是从矩阵到线性空间，而是从线性空间到矩阵。在 线性映射和矩阵的关系 一文中，我们从线性映射引出了矩阵，这种自然的过渡不知道比从莫名其妙的行列式高明多少。说实话，大一的时候碰到行列式，然后进行各种稀奇古怪的计算时，我的内心是崩溃的，你现在还记得四阶行列式用伴随子计算的过程么？忘了最好!；好不容易从行列式出来，又突然进入了矩阵的泥潭，这完全是再次莫名其妙，等到线性映射出现的时候，已经“三而竭”了。尽管最后考了高分，那完全是填鸭式突击的结果。

在本文我们再次把矩阵和线性映射紧密联系。这次我们先给出矩阵转置的定义，然后论述矩阵的转置是如何和线性空间以及线性映射结合的。

1 对偶映射的矩阵

定义 *1.1* 矩阵A的转置是通过互换A的行和列来完成的。确切的说，若A是$m\times n$的矩阵，则A^t是$n \times m$矩阵，其元素由下面的等式给出：

$$(A^t)_{k,j} = A_{j,k}$$

转置有一个特别好的性质：对所有的$m \times n$矩阵A, C和所有$\lambda \in \mathbf{F}$均有$(A+C)^t A^t + C^t$ 且$(\lambda A)^t = \lambda A^t$。

定理 *1.1* 若A是$m \times n$矩阵,C是$n \times p$矩阵，则：

$$(AC)^t = C^t A^t$$

证 设$1 \le k \le m, 1 \le j \le p$，则：

$$\begin{aligned}
(AC)^t_{j,k} &= (AC)_{k,j} && (1.1)\\
&= \sum_{r=1}^{n} A_{k,r}C_{r,j} && (1.2)\\
&= \sum_{r=1}^{n} (A^t)_{r,k}(C^t)_{j,r} && (1.3)\\
&= \sum_{r=1}^{n} (C^t)_{j,r}(A^t)_{r,k} && (1.4)\\
&= (C^tA^t)_{j,k} && (1.5)
\end{aligned}$$

即：$(AC)^t = C^tA^t$ □

定理 *1.2* 假设V有基$v_1, \dots, v_n$，$V^{'}$的对偶基$\varphi_1, \dots, \varphi_n$，并假设$W$有基$w_1, \dots, w_m$以及$W^{'}$的对偶基$\psi_1, \dots, \psi_m$，于是$\mathcal{M}(T)$是按$V$和$W$的上述基对应的矩阵，$\mathcal{M}(T^{'})$时按照$W^{'}$和$V^{'}$对应的矩阵计算。

则有对于$T \in \mathcal{L}(V, W)$，有$\mathcal{M}(T^{'}) = (\mathcal{M}(T))^t$

证 这个命题的证明仅仅需要紧扣定义。

设$A = \mathcal{M}(T)$,$C = \mathcal{M}(T^{'})$，再设$1 \le j \le m$,$1 \le k \le n$，由$\mathcal{M}(T^{'})$的定义我们有：

$$T^{'}(\psi_j) = \sum_{r=1}^{n} C_{r,j}\varphi_r \qquad (1.6)$$

因为$T^{'}(\psi_j) = \psi_j \circ T$,所以，将上式两端作用到v_k上，有：

$$\begin{aligned}
(\psi_j \circ T)(v_k) &= \sum_{r=1}^{n} C_{r,j}\varphi_r(k) && (1.7)\\
&= C_{k,j} && (1.8)
\end{aligned}$$

另外，根据$T(v_k)$的定义我们有：

$$\begin{aligned}
(\psi_j \circ T)(v_k) &= \psi_j(Tv_k) && (1.9)\\
&= \psi_j(\sum_{r=1}^{m} A_{r,k}w_r) && (1.10)\\
&= \sum_{r=1}^{m} A_{r,k}\psi_j(w_r) && (1.11)\\
&= A_{j,k} && (1.12)
\end{aligned}$$

综上有：$A_{j,k} = C_{k,j}$，即$A = C^t$ □

2 矩阵的秩

定义 *2.1* 设A是元素属于F的$m \times n$矩阵：

1. A的行秩是A的诸行在$\mathbf{F}^{1,n}$中的张成空间的维数；
2. A的列秩是A的诸列在$\mathbf{F}^{m,1}$中的张成空间的维数。

定理 *2.1* 设V和W都是有限维的，$T \in \mathcal{L}(V,W)$，则$\dim rangeT$等于$\mathcal{M}(T)$的列秩。

证 设$v_1, \ldots, v_n$是V的基，$w_1, \ldots, w_n$是W的基。则将$w \in span(Tv_1, \ldots, Tv_n)$变为$\mathcal{M}(w)$的函数是从$span(Tv_1, \ldots, Tv_n)$到$span(\mathcal{M}(Tv_1), \ldots, \mathcal{M}(Tv_n))$的同构。于是$\dim span(Tv_1, \ldots, Tv_n) = \dim span(\mathcal{M}(Tv_1), \mathcal{M}(Tv_n))$ 等式右边的维数等于$\mathcal{M}(T)$的列秩。

因为$rangeT = span(Tv_1, \ldots, Tv_n)$，所以$\dim rangeT = \dim span(Tv_1, \ldots, Tv_n)$□

定理 *2.2* 设$A \in \mathbf{F}^{m,n}$，则A的行秩等于A的列秩。