练习：张成空间与线性无关

张朝龙

目录

2.a.1

设v_1, v_2, v_3, v_4张成V，证明组$v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4$也张成$V$
设$u \in V$，则存在c_1, c_2, c_3, c_4使得

$$\begin{aligned} u &= c_1 v_1 + (c_2 - c_1) v_2 + (c_3 - c_2) v_3 + (c_4 - c_3) v_4 \\ &= c_1(v_1 - v_2) + c_2(v_2 - v_3) + c_3(v_3 - v_4) + c_4 v_4 \end{aligned}$$

我们有，能用v_1, v_2, v_3, v_4表示的元素，同样可以用$v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4$来表示。命题得证。

2.a.3

求数t使得$(3, 1, 4), (2, -3, 5), (5, 9, t)$在$\mathbf{R}^3$中不是线性无关的。
假设有x, y, z使得：

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 5 \quad (0.1) \\ x - 3y &= 9 \quad (0.2) \\ 4x + 5y &= t \quad (0.3) \\ & \quad (0.4) \end{aligned}$$

由前两个十字我们得到 $x = 3, y = -2, t = 2$ 如此，我们有 $3(3, 1, 4) + (-2)(2, -3, 5) = (5, 9, 2)$，因此$t = 2$是我们要找的那个数。

2.a.5

证明：若将$\mathbf{C}$视为$\mathbf{R}$上的向量空间，则$1 + i, 1 - i$是线性无关的。
假设存在$x, y \in \mathbf{R}$使得：

$$x(1 + i) + y(1 - i) = 0 \quad (0.5)$$

则有:

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

所以$x = y = 0$,即 $1 + i, 1 - i$是线性无关的。
证明：若将$\mathbf{C}$视为$\mathbf{C}$上的向量空间，则$1 + i, 1 - i$是线性相关的。
假设存在$x, y \in \mathbf{F}$使得：

$$x(1+i)+y(1-i)=0 \tag{0.6}$$

我们有x=1-i,y=-(1+i)，使得$(1-i)(1+i)-(1+i)(1-i)=0$

2.a.6

设v_1,v_2,v_3,v_4是线性无关的，证明$v_1-v_2,v_2-v_3,v_3-v_4,v_4$也是线性无关的。

假设存在a_1,a_2,a_3,a_4使得

$$a_1(v_1-v_2)+a_2(v_2-v_3)+a_3(v_3-v_4)+a_4v_4=0 \tag{0.7}$$

对上式变形有：

$$a_1v_1+(a_2-a_1)v_2+(a_3-a_2)v_3+(a_4-a_3)v_4=0 \tag{0.8}$$

又因为v_1,v_2,v_3,v_4是线性无关的，所以有：

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_2-a_1 &= 0 \\ a_3-a_2 &= 0 \\ a_4-a_3 &= 0 \end{aligned}$$

显然有$a_1=a_2=a_3=a_4=9$, 即原命题得证。

2.a.7

证明或者给出反例:若$v_1,v_2,\ldots,v_m$在V中线性无关，则$5v_1-4v_2,v_2,v_3,\ldots,v_m$是线性无关的。

这是个真命题，证明过程和2.a.6的过程一样。就不详述了。

2.a.8

证明或者给出反例：设$v_1,\ldots,v_m$在V中线性无关，并设$\lambda\in\mathbf{F}$且$\lambda\neq 0$，则$\lambda v_1,\lambda v_2,\ldots,\lambda v_m$是线性无关的。

证明过程同2.a.6

2.a.9

证明或者给出反例：若$v_1,\ldots,v_m$和$w_1,\ldots,w_m$是V中的线性无关组，则$v_1+w_1,\ldots,v_m+w_m$是线性无关的。

反例：有当$w_i=-v_i,i=1,\ldots,m$时，$v_i+w_i=0,i=1,\ldots,m$，此时m个0向量构成的向量组是线性相关的。

2.a.10

设$v_1,\ldots,v_m$在V中线性无关，并设$w\in V$，证明若$v_1+w,\ldots,v_m+w)'s$fiß$\Psi w\in span(v_1,\ldots,v_m$

显然若$v_1+w,\ldots,v_m+w$线性相关，则存在不全为零的$a_1,a_2,\ldots,a_m$使得：

$$a_1(v_1+w)+\ldots+a_m(v_m+w)=0 \tag{0.9}$$

则有

$$\sum_{i=1}^{m} a_i v_i = -\sum_{i=1}^{m} a_i w \tag{0.10}$$

若$\sum_i^m a_i = 0$，则有上式右边为零，根据$v_1, \ldots, v_m$在V中线性无关，我们有$a_i = 0, i = 1, \ldots, m$，与假设矛盾（我们假设$a_i, i = 1, \ldots, m$不全为零）。因此$\sum_i^m a_i \neq 0$

因此：

$$w = -\frac{\sum_{i=1}^m a_i v_i}{\sum_{i=1}^m a_i} \tag{0.11}$$

即$w \in span(v_1, \ldots, v_m)$

2.a.11

设$v_1, \ldots, v_m$在V中线性无关，并设$w \in V$，证明：$v_1, \ldots, v_m, w$线性无关，当且仅当$w \notin span(v_1, \ldots, v_m)$

证明，我们首先从$v_1, \ldots, v_m, w$线性无关，推出$w \notin span(v_1, \ldots, v_m)$。使用反证法。假设 $w \in span(v_1, \ldots, v_m)$，则存在$a_1, \ldots, a_m$使得：

$$w = a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m \tag{0.12}$$

即:$a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m - w = 0$,因为$w$的系数为$-1$，与$v_1, \ldots, v_m, w$线性无关矛盾。

接着我们从$w \notin span(v_1, \ldots, v_m)$，推出$v_1, \ldots, v_m, w$线性无关。同样使用反证法：假设$v_1, \ldots, v_m, w$线性相关，则有不全为零的数$a_1, \ldots, a_m, b$，使得：

$$bw + a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m = 0 \tag{0.13}$$

此时b一定不等于零，因为若$b = 0$，根据$v_1, \ldots, v_m$在V中线性无关，则有$a_i = 0, i = 1, \ldots, m$，此时$v_1, \ldots, v_m, w$线性无关，与假设矛盾。

由于b不等于零，则有：

$$w = -\frac{\sum_i^m a_i v_i}{b} \tag{0.14}$$

显然有$w \in span(v_1, \ldots, v_m)$，与假设矛盾。

2.a.12

为什么在$\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$中不存在由6个多项式构成的线性无关组。

因为$1, x, x^2, x^3, x^4$张成了$\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$，而一个空间总线性无关组的长度不可能大于张成组的长度。

2.a.13

为什么4个多项式构成的组不能张成$\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$?

因为$1, x, x^2, x^3, x^4, x^5$这个线性无关组张成了$\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$，所以4个多项式构成的组不能张成$\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$。

2.a.14

证明:V是无限维的当且仅当V中存在一个向量序列$v_1, v_2, \ldots$使得当m是任意正整数时，都有$v_1, \ldots, v_m$都是线性无关的。

假设V是无限维，说明V不能有该空间的任何向量组张成。因此当存在m使得$V = span(v_1, \ldots, v_m)$时，与定义矛盾。

假设一个向量序列$v_1, v_2, \ldots$使得当m是任意正整数时，都有$v_1, \ldots, v_m$都是线性无关的，则说明任意有限个元素的向量组都无法张成V，说明V是无限维的。

2.a.15

证明$\mathbf{F}^\infty$是无限维的。

假设$0,\dots,0,1,0,\dots$是除了第i个元素以外都为领的向量。显然$e_1,\dots,e_m$是线性无关的。根据2.a.14我们有$\mathbf{F}^\infty$是无穷维的。

2.a.16

证明区间$[0,1]$上的所有实值连续函数构成的向量空间是无穷维的。

这个题目我一直解不出来，一定有什么tricky的东西。

定义：

$$f_n = \begin{cases} x - 1/n & x \geq 1/n; \\ 0, & x \in [0,1/n] \end{cases} \tag{0.15}$$

那么f_n在$[0,1]$内是连续的。接下来，我们证明$f_{n+1} \notin span\{f_1,\dots,f_n\}$，那么就有明区间$[0,1]$上的所有实值连续函数构成的向量空间是无穷维的。

如果$f_{n+1} \notin span\{f_1,\dots,f_n\}$，那么有:

$$f_{n+1}(x) = a_1 f_x + \dots + a_n f_n(x) \tag{0.16}$$

注意，我们有$f_1(1/n) = \dots = f_n(1/n) = 0$,但是$f_{n+1} = 1/(n(n+1)) \neq 0$。矛盾。命题得证

2.a.17

设$p_0,\dots,p_m$ 是$\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$中的多项式使得对每个$j$都有$p_j(2) = 0$,证明$p_0,p_1,\dots,p_m$在$\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$中不是线性无关的。

假设$p_0,p_1,\dots,p_m$是线性独立的。我们知道对于一个维度是m的线性子空间，这个空间中的线性无关组向量的个数不可能大于其张成组向量的个数。我们知道$1,z,\dots,z^m$张成了$\mathcal{P}_m(z)$，又因为假设$p_0,p_1,\dots,p_m$是线性独立的，说明其也是$\mathcal{P}_m(z)$的张成向量组。所以存在：

$$z = a_0 p_0(z) + \dots a_m p_m(z) \tag{0.17}$$

又因为每个j都有$p_j(2) = 0$，我们有$z = 2$，矛盾。

所以$p_0,p_1,\dots,p_m$在$\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$中不是线性无关的。