本征空间

定义 *0.1* 设$T \in \mathcal{L}(V)$且$\lambda \in \mathbf{F}$，T的相应于λ的本征空间定义为：

$$E(\lambda, T) = \mathrm{null}(T - \lambda I) \tag{0.1}$$

也就是说，$E(\lambda, T)$是T的相应于λ的全体本证向量加上0构成的集合。

对于$T \in \mathcal{L}(V)$和$\lambda \in \mathbf{F}$，本征空间$E(\lambda, T)$是V上的子空间，因为线性映射的零空间都是V的子空间。由定义可知，λ是T的特征值当且仅当$E(\lambda, T) \neq \{0\}$。

定理 *0.1* 设V是有限维的，$T \in \mathcal{L}(V)$，设$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$是$T$的互异的本征值，则：

$$E(\lambda_1, T) + \ldots E(\lambda_m, T) \tag{0.2}$$

是直和，此外：

$$\dim E(\lambda_1, T) + \ldots + \dim E(\lambda_m, T) \leq= dimV \tag{0.3}$$

证 假设

$$u_1 + \ldots + u_m = 0 \tag{0.4}$$

其中每个u_j包含于$E(\lambda_j, T)$，因为相应与互异的特征值的特征向量是线性无关的，所以上式中$u_j = 0, \forall j$。因此$E(\lambda_1, T) + \ldots + E(\lambda_m, T)$是直和。

现在有：

$$\dim E(\lambda_1, T) + \ldots + \dim E(\lambda_m, T) = \dim(E(\lambda_1, T) \oplus + \ldots + \oplus E(\lambda_m, T)) \leq \dim V \tag{0.5}$$

□

算子$T \in \mathcal{L}(V)$称为可对角化的，如果概算自关于V的某个基有对角矩阵。

例 *0.1* 定义$T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$为$T(x, y) = (41x + 7y, -20x + 74y)$.$T$关于$\mathbf{R}^2$的标准基的矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 41 & 7 \\ -20 & 74 \end{bmatrix} \tag{0.6}$$

这不是一个对角矩阵，但是T可以对角化，其关于$(1,4),(7,5)$的矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 69 & 0 \\ 0 & 46 \end{bmatrix} \tag{0.7}$$

定理 *0.2* 设V是有限维的，$T \in \mathcal{L}(V)$，用$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$表示$T$的所有互异的本征值。则下列条件等价：

1. T可对角化；

2. V有由T的本征向量构成的基；

3. V有在T下不变的一维子空间$U_1, \ldots, U_n$使得$V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$

4. $V = E(\lambda_1, T) \oplus \ldots + E(\lambda_m, T)$

5. $\dim V = \dim E(\lambda_1, T) + \ldots + \dim E(\lambda_m, T)$

证 算子$T \in \mathcal{L}(V)$关于V的基$v_1, \ldots, v_n$有对角矩阵：

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{0.8}$$

显然有$Tv_j = \lambda_j v_j$。即，这些基也是T的本证向量。所以V的这些基由T的本证向量构成。

假设第二步成立，则V有一个T的本证向量构成的基$v_1, \ldots, v_n$，对每个j，设$U_j = \text{span}(v_j)$，显然每个U_j都是V的一维子空间且在T下不变。因为$v_1, \ldots, v_n$是V的基，所以V中每个向量都可以唯一的写成$v_1, \ldots, v_n$的线性组合。也就是说V中的每个向量都可以写成$u_1 + \ldots + u_n$的线性组合，其中每个$u_j \in U_j$，于是$V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$。

假设第三步成立，则V有在T下不变的一维子空间$U_1, \ldots, U_n$使得$V = U_1 \oplus + \ldots + \oplus U_n$。假设$\forall\, j, v_j \in U_j, u_j \neq 0$，则每个$v_j$都是$T$的特征向量。因为$V$中的每个向量都可以唯一地写成$u_1 + \ldots u_n$的形式，所以$v_1, \ldots, v_n$是$V$的基。

现在我们证明了第一步，第二步和第三部是等价的，

现在证明第二步蕴含第四步，第四步蕴含第五步，第五步蕴含第二步。

假设第二步成立，则V有一个由T的本证向量组成的基。于是,V中每个向量都是T的本证向量的线性组合，因此：

$$V = E(\lambda_1, T) + \ldots + E(\lambda_n, T) \tag{0.9}$$

又因为$\lambda_1, \dots, \lambda_n$是互异的特征值，所以:

$$V = E(\lambda_1, T) \oplus \dots \oplus E(\lambda_n, T) \tag{0.10}$$

第四步成立，则根据*2.C.16*，第五步成立。 □

例 *0.2* 证明由$T(w,z) = (z,0)$定义的算子$T \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^2)$不可对角化

证 容易验证0是T的唯一本征值且$E(0,T) = \{(w,0) \in \mathbf{C}^2 : w \in \mathbf{C}\}$，根据以上的证明，$T$不可对角化。 □

定理 *0.3* 若$T \in \mathcal{L}(V)$有$\dim V$个互异的本征值，则T可对角化。

证 设$T \in \mathcal{L}(V)$有$\dim V$个互异的本征值$\lambda_1, \dots, \lambda_{\dim V}$对每个$j$，设$v_j \in V$是相应于本征值$\lambda_j$的本证向量。因为相应与互异的特征值的特征向量是线性无关的,所以$v_1, \dots, v_{\dim V}$线性无关。V中$\dim V$个向量组成的线性无关组是V的基。 □