正算子与等距同构

张朝龙

目录

1 正算子

定义 *1.1* 我们称算子$T \in \mathcal{L}(V)$是正的，如果T 是自伴的，且对所有$v \in V$ 均有$\langle Tv, v\rangle \geq 0$.

若V 是复向量空间，则T是自伴的条件可以从上面的定义中去掉。

例 1.1

1. 若U是V的子空间，则正交投影P_U是正算子。
2. 若$T \in \mathcal{L}(V)$是自伴的，且$b, c \in \mathbf{R}$使得$b^2 < 4c$，则$T^2 + bT + cI$是正算子。

定义 *1.2* 算子R 称为算子T 的平方根，如果$R^2 = T$

例 1.2

设$T \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^3)$是由$T(z_1, z_2, z_3) = (z_3, 0, 0)$定义的算子，则由$R(z_1, z_2, z_3) = (z_2, z_3, 0)$定义的算子$R \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^3)$是$T$的平方根。

下面的定理对正算子的刻画与$\mathbf{C}$中非负数的刻画是相对应的。具体来说，复数z非负当且仅当它有非负平方根，这对应于条件c。此外，z非负当且仅当它有实的平方根，这对应于条件d。最后，z非负当且仅当有复数w使得$z = w\bar{w}$，这对应于条件e。

定理 1.1

设$T \in \mathcal{L}(V)$，则以下条件等价：

1. T是正的。
2. T是自伴的且T的所有本征值非负。
3. T有正的平方根。
4. T有自伴的平方根。
5. 存在算子$R \in \mathcal{L}(V)$使得$T = R^*R$

证 我们按顺序证明$(a) \Rightarrow$ □