练习：向量空间的积与商

张朝龙

目录

1 3.E.1

问题 设T是V到W的函数。定义T的 **图** 为$V\times W$的如下子集：

$$\{(v,Tv)\in V\times W: v\in V\}$$

证明T是线性映射当且仅当T的图是$V\times W$的子空间。

解答： 正式的将，V到W的函数T是$V\times W$的一个子集T，使得对于每个$v\in V$都有一个元素$(v,w)\in T$，也就是说，函数正式的讲就是上面所谓的图。我们通常并不把函数看成上面的这种正式形式。然而，如果采用上面的正式形

式，则本题可以重述为：证明V到W的函数T是线性映射当且仅当T是$V \times W$的子空间。

假设T是线性映射则，对于$u, v \in V, \lambda \in \mathbf{F}$有:$T(u+v) = Tu + Tv, T(\lambda u) = \lambda Tu$.

基对于$(u, Tu), (v, Tv) \in T$,则有$(u+v, T(u+v)) \in T$，齐次性的证明类似。

所以我们可以从T是线性映射推出T的图是$V \times W$的子空间。

另一方面，假设 T 的图是$V \times W$的一个子空间，则对于$(v, Tv), (u, Tu)$有$(u+v, T(u+v))$也属于T的图，根据线性映射的定义有$Tv + Tw = T(v+W)$。另外T的齐次性证明类似。

综上，命题得证。

2 4.E.2

问题 设$V_1, \ldots, V_m$均为向量空间使得$V_1 \times \ldots \times V_m$是有限维的。证明对于每个$j = 1, \ldots, m$来讲$V_j$是有限维的。

解答: 根据 *3.76*，命题得证。$\dim(V_1 \times V_2 \ldots \times V_m) = \sum_{j=1}^{m} \dim V_j$

3 3.E.7

问题 设$v, x \in V$，U, W是V的子空间，$v + U = x + W$，证明$U = W$

解答: 这种问题的证明一般是先证明$U \subseteq W$，然后$W \subseteq U$.

首先我们证明$U \subseteq W$。因为$v + U = x + W$，则存在$w_1 \in W$使得$v = x + w_1$。所以有$v - x \in W$，对于任何的$u \in U$，存在$w_2 \in W$有

$$v + u = x + w_2$$

所以有：

$$u = (x - v) + w_2 \in W$$

所以有$U \subseteq W$。类似的有$W \subseteq U$

4 3.E.8

问题 证明：V的非空子集A是V的仿射子集当且仅当对于所有的$v, w \in A$和$\lambda \in \mathbf{F}$均有$\lambda v + (1-\lambda) w \in A$

解答: 首先假设A是V的一个仿射子集，则存在$a \in V$和V的子空间U，使得$A = a + U$。对于A中的任何向量v, w都存在$u_1, u_2 \in U$可以写成$v = a + u_1$,$w = a + u_2$.因此：

$$\lambda v + (1-\lambda)w = a + [\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2] \in a + U = A$$

另一方面，因为A非空，假设$a \in A$，只要我们证明

$$A - a = \{x - a : x \in A\}$$

是V的一个子空间。因为只要证明$A - a$是V的子空间，则$A = a + A - a$，我们就可以得到A是V的仿射子集。

对于$x - a \in A - a$，$\lambda \in \mathbf{F}$，那么：

$$\lambda x + (1-\lambda)a \in A \to \lambda(x-a) = \lambda x + (1-\lambda)a - a \in A - a \tag{4.1}$$

这意味着$A - a$标量乘法封闭。对于$x - a \in A - a$和$y - a \in A - a$，其中$x, y \in A$,我们有：$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} - a \in A - a$ 因为$A - a$在标量乘法下封闭，所以

$$(x-a) + (y-a) = 2(x/2 + y/2 - a) \in A - a$$

即，$A - a$加法封闭，所以$A - a$是V的一个子空间。

5 3.E.9

问题 设A_1和A_2均为V的仿射子集。证明$A_1 \cap A_2$是V的仿射子集或者空集。

解答: 假设$A_1 \cap A_2 = \varnothing$，那么对于$x, y \in A_1 \cap A_2$ 和$\lambda \in \mathbf{F}$，根据上一题，我们有：

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in A_1 \tag{5.1}$$

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in A_2 \tag{5.2}$$

，所以$\lambda x + (1-\lambda)y \in A_1 \cap A_2$

再次利用上一题的结论，$A_1 \cap A_2$是V的一个仿射子集。

6 3.E.10

问题 证明V的任意一族仿射子集的交是V的仿射子集或者空集。

解答: 证明过程如上一题。

7 3.E.11

问题 设$v_1,\ldots,v_m \in V$，令：

$$A = \{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m : \lambda_1,\ldots,\lambda_m \in \mathbf{F}, \lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1\} \tag{7.1}$$

1. 证明A是V的仿射子集。

2. 证明V的每个包含$v_1,\ldots,v_m$的仿射子集均包含A。

3. 证明有某个$v \in V$以及V的某个子空间U使得$A = v + U$且$\dim U \leq m-1$

解答： 1. 设$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \in A$，$w = \eta_1 v_1 + \ldots + \eta_m v_m \in A$，其中$\lambda_1,\ldots,\lambda_m \in \mathbf{F}$，$\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$，$\eta_1,\ldots,\eta_m \in \mathbf{F}$，$\eta_1 + \ldots + \eta_m = 1$，

对任意的$\lambda \in \mathbf{F}$，有：

$$\lambda v + (1-\lambda) w = \sum_{i=1}^{m} (\lambda\lambda_i + (1-\lambda)\eta_i) v_i \tag{7.2}$$

注意到：

$$\sum_{i=1}^{m} (\lambda\lambda_i + (1-\lambda)\eta_i) = \lambda \sum_{i=1}^{m} \lambda_i + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{m} \eta_i = \lambda + (1-\lambda) = 1 \tag{7.3}$$

所以有：$\lambda v + (1-\lambda) w \in A$，根据第 *8* 题，我们有：$A$是$V$的仿射子集。

这个问题 告诉我们证明一个子集是仿射子集不一定要按照定义来，也可以从第 *8* 题的思路出发。

1. 接下来使用数学归纳法来证明对人包含$v_1,\ldots,v_m$的仿射子集包含A.

对于$k \leq m$，如果$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$，我们有：

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j \in W \tag{7.4}$$

对于$k = 1,2$，根据 *3.E.8*，我们有命题成立。

假设对于k命题成立，则对于$k+1 \leq m$，假设有$\sum_{i}^{k+1} \lambda_i = 1$，如果$\lambda_{k+1} = 1$，那么

$$\sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j v_j = v_{k+1} \in W \tag{7.5}$$

如果$\lambda_{k+1} \neq 1$,那么：

$$\frac{1}{1-\lambda_{k+1}} (\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k) \in W \tag{7.6}$$

也就是说：

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{k+1} v_{k+1} \in W \tag{7.7}$$

所以$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \in W$

1. 因为$\lambda_1 + \ldots \lambda_m = 1$，那么：

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = v_1 + \lambda_2(v_2 - v_1) + \ldots + \lambda_m(v_m - v_1) \tag{7.8}$$

因此$A \subseteq v_1 + span(v_2 - v_1, \ldots, v_m - v_1)$, v可以写为另外一种形式：

$$v_1 + \sum_{j=2}^{m} \lambda_i(v_i - v_1) = (1 - \lambda_2 - \ldots - \lambda_m) + \sum_{i=2}^{m} \lambda_i v_i \tag{7.9}$$

注意:$1 - \lambda_2 - \ldots - \lambda_m + \sum_{j=2}^{m} \lambda_i = 1$，所以

$$v_1 + span(v_2 - v_1, \ldots, v_m - v_1) \subseteq A \tag{7.10}$$

继而有：

$$A = v_1 + span(v_2 - v_1, \ldots, v_m - v_1) \tag{7.11}$$

令$v = v_1$，$U = span(v_2 - v_1)$，则有$\dim U \leq m - 1$

8 3.E.12

问题 设U是V的子空间使得V/U是有限维的。证明V同构于$U \times (V/U)$

解答:

9 3.E.13

问题 设U是V的子空间，$v_1+U, \ldots, v_m+U$是V/U的基，$u_1, \ldots, u_n$是U的基，证明$v_1, \ldots, v_m, u_1, \ldots, u_n$是$V$的基。

解答: