

向量空间的积

张朝龙

目录

定义 0.1 设 V_1, \dots, V_m 均为 \mathbf{F} 上的向量空间。

1. 定义积 $V_1 \times \dots \times V_m$ 为:

$$V_1 \times \dots \times V_m = \{(v_1, \dots, v_m) : v_1 \in V_1, \dots, v_m \in V_m\}$$

2. 定义 $V_1 \times \dots \times V_m$ 上的加法为:

$$(u_1, \dots, u_m) + (v_1, \dots, v_m) = (u_1 + v_1, \dots, u_m + v_m)$$

3. 定义 $V_1 \times \dots \times V_m$ 上的标量乘法为

$$\lambda(v_1, \dots, v_m) = (\lambda v_1, \lambda v_2, \dots, \lambda v_m)$$

显然，向量空间的积也是向量空间，我们只需要证明其满足齐次可加性，并且零元也位于这个空间即可。

例 0.1 $\mathcal{P}_2(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^3$ 中的元素是长度为2的组，组的第一项是 $\mathcal{P}_2(\mathbf{R})$ 中的元素，组的第二项是 \mathbf{R}^3 中的元素。比如 $(5 - 6x + x^2, (5, 8, 6)) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^3$

例 0.2 $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^3$ 等于 \mathbf{R}^5 么？ $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^3$ 与 \mathbf{R}^5 同构么？

首先根据定义， $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^3 = ((x_1, x_2), (x_3, x_4, x_5))$ ，其中 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbf{R}$ 而 \mathbf{R}^5 中的元素为 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$

$\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^3$ 和 \mathbf{R}^5 看起来很像，但是这两个集合是不相等的，因为 $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^3$ 中的元素是二元组，其中第一个元素是个二元组，第二个元素是三元组，而 \mathbf{R}^5 中的元素是五元组，每一个元素都是实数。

但是 $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^3$ 与 \mathbf{R}^5 显然是同构的，从 $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^3$ 到 \mathbf{R}^5 的映射既单又满。



例 0.3 求 $\mathcal{P}_2(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^2$ 的一个基。

有：

$$(1, (0, 0)), (x, (0, 0)), (x^2, (0, 0)), (0, (1, 0)), (0, (1, 0))$$

推广上面的这个例子，我们有：

定理 0.1 设 V_1, \dots, V_m 均为有限维向量空间，则 $V_1 \times \dots \times V_m$ 是有限维的，且：

$$\dim(V_1 \times \dots \times V_m) = \dim V_1 + \dots + \dim V_m$$

证 我们可以选取每个 V_j 的一个基。对于每个 V_j 的每个基向量，考虑 $V_1 \times \dots \times V_m$ 的如下元素：第 j 个位置为此基向量，其余位置为 0。显然所有这些向量构成的组是线性无关的，且张成 $V_1 \times \dots \times V_m$ ，因此是 $V_1 \times \dots \times V_m$ 的基。这个基的长度是 $\dim V_1 + \dots + \dim V_m$ \square

接下来我们考虑积与直和的关系

定理 0.2 设 U_1, \dots, U_m 均为 V 的子空间。线性映射 $\Gamma : U_1 \times \dots \times U_m \rightarrow U_1 + \dots + U_m$ 定义为： $\Gamma(u_1, \dots, u_m) = u_1 + \dots + u_m$ ，则 $U_1 + \dots + U_m$ 是直和当且仅当 Γ 是单射。

证 线性映射 Γ 是单的当且仅当 0 表示为 $u_1 + \dots + u_m$ 时，每个 u_j 都等于 0。根据直和的条件，我们知道线性映射 Γ 是单的与 $U_1 + \dots + U_m$ 是直和这两个命题是等价的。 \square

定理 0.3 设 V 是有限维的， U_1, \dots, U_m 是 V 的子空间，则 $U_1 + \dots + U_m$ 是直和当且仅当 $\dim(U_1 + \dots + U_m) = \dim U_1 + \dots + \dim U_m$

证 定义线性映射 $\Gamma : U_1 \times \dots \times U_m \rightarrow U_1 + \dots + U_m$ 定义为： $\Gamma(u_1, \dots, u_m) = u_1 + \dots + u_m$ 。当线性映射 Γ 是单的时，根据线性映射基本定理有 $\dim(U_1 + \dots + U_m) = \dim(U_1 \times \dots \times U_m)$

又因为 $\dim(U_1 \times \dots \times U_m) = \dim(U_1) + \dots + \dim(U_m)$ ，所以必有： $\dim(U_1 + \dots + U_m) = \dim U_1 + \dots + \dim U_m$ \square

首先定义向量与子空间的和，然后定义商空间。

定义 0.2 设 $v \in V$ ， U 是 V 的子空间，则 $v + U$ 是 V 的子集，定义如下：

$$v + U = \{v + u : u \in U\} \quad (0.1)$$

定义 0.3 1. V 的仿射子集是 V 的形如 $v + U$ 的子集，其中 $v \in V, U$ 是 V 的子空间。

2. 对于 $v \in V$ 和 V 的子空间 U ，称仿射子集 $v + U$ 平行于 U



例 0.4 若 $U = \{(x, y, 0) \in \mathbf{R}^3 : x, y \in \mathbf{R}\}$ 则 \mathbf{R}^3 的平行于 U 的仿射子集是 \mathbf{R}^3 中在通常意义下平行于 xy 平面 U 的那些平面 (注意这里必须是平面, 直线不行.)。

定义 0.4 设 U 是 V 的子空间, 则商空间 V/U 是指 V 中所有平行于 U 的仿射子集的集合。也就是说:

$$V/U = \{v + U : v \in V\} \quad (0.2)$$

例 0.5 1. 若 $U = \{(x, 2x) \in \mathbf{R}^2 : x \in \mathbf{R}\}$, 则 \mathbf{R}^2/U 是 \mathbf{R}^2 中所有平行于 U 的直线的集合。

2. 若 U 是 \mathbf{R}^3 中的包含原点的直线, 则 \mathbf{R}^3/U 是 \mathbf{R}^3 中所有平行于 U 的直线的集合。

3. 若 U 是 \mathbf{R}^3 中的包含原点的平面, 则 \mathbf{R}^3/U 是 \mathbf{R}^3 中所有平行于 U 的平面的集合。

定理 0.4 设 U 是 V 的子空间, $v, w \in V$, 则一下陈述等价:

1. $v - w \in U$
2. $v + U = w + U$
3. $(v + U) \cap (w + U) \neq \emptyset$

证 假设 1 成立, 则有对于任何的 $u \in U$ 都有:

$$v + u = w + v - w + u = w + (v - w) + u \in w + U \quad (0.3)$$

所以 $v + U \subseteq w + U$

对于所有的 $u \in U$ 都有:

$$(w + u) = v + w - v + u = v + (w - v) + u \in v + U \quad (0.4)$$

所以 $w + U \subseteq v + U$

从 2 到 3 是显然的。

我们证明从 3 到 1. 假设 $(v + U) \cap (w + U) \neq \emptyset$, 则存在 u_1, u_2 使得:

$$v + u_1 = w + u_2 \quad (0.5)$$

所以有 $v - w = u_2 - u_1$, 显然有 $v - w \in U$ □



定义 0.5 定义 V/U 上的加法和标量乘法。设 U 是 V 的子空间，则 V/U 上的加法和标量乘法定义为：对任意 $v, w \in V$ 和 $\lambda \in \mathbf{F}$ ：

$$(v + U) + (w + U) = (v + w) + U \quad (0.6)$$

$$\lambda(v + U) = (\lambda v) + U \quad (0.7)$$

定理 0.5 设 U 是 V 的子空间。则 V/U 按照上面定义的加法和标量乘法构成向量空间。

证 在我们定义 V/U 的加法和标量乘法中，一个问题是平行于 U 的仿射子集的表示并不是唯一的。具体来说，设 $v, w \in V$ ，假设 $\hat{v}, \hat{w} \in V$ 使得 $v + U = \hat{v} + U$ 和 $w + U = \hat{w} + U$ ，要证明上面给出的 V/U 上的加法是有意义的，必须证明 $(v + w) + U = (\hat{v} + \hat{w}) + U$

因为 $v - \hat{v} \in U$ ， $w - \hat{w} \in U$ ，因为 U 是 V 的子空间，所以在加法下封闭，所以 $v - \hat{v} + w - \hat{w} \in U$ 所以 $v + w - (\hat{v} + \hat{w}) \in U$ ，所以有：

$$v + w + U = \hat{v} + \hat{w} + U \quad (0.8)$$

同理，设 $\lambda \in \mathbf{F}$ ，因为 U 是 V 的子空间，所以在标量乘法下封闭从而有 $\lambda(v - \hat{v}) \in U$ ，所以有：

$$\lambda v + U = \lambda \hat{v} + U \quad (0.9)$$

现在我们假设 $v + U, u + U \in V/U$ ，则有 $v + U + u + U = (v + u) + U \in V/U$ ，同理 $\lambda \in \mathbf{F}$ 则 $\lambda(v + U) = \lambda v + U \in V/U$

另外 V/U 中的加法零元是 U 。因为任何的 $v + U$ 在加上 U 都是其本身。□

定义 0.6 设 U 是 V 的子空间。商映射 π 是如下定义的线性映射 $\pi : V \rightarrow V/U$ 对任意的 $v \in V$ 满足： $\pi(v) = v + U$

定理 0.6 设 V 是有限维的， U 是 V 的子空间，则： $\dim V/U = \dim V - \dim U$

证 定义 $\pi : V \rightarrow V/U$ ，则有 $\text{null}\pi = U$ ，根据线性映射基本定理则有：

$$\dim V = \dim \text{null}\pi + \dim \text{range}\pi \quad (0.10)$$

因为 $\text{range}\pi = V/U$ ，所以 $\dim V/U = \dim V - \dim U$ 。□

从商映射的一般形式可以推导出一个特别重要映射。

定义 0.7 设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ ，定义 $\tilde{T} : V/(\text{null}T) \rightarrow W$ ，如下：

$$\tilde{T}(v + \text{null}T) = Tv \quad (0.11)$$



现在对这个定义做一下简单的说明。设 $u, v \in V$ 使得 $u + \text{null}T = v + \text{null}T$ 则有 $u - v \in \text{null}T$, 于是 $T(u - v) = 0$, 则 $Tu = Tv$, 因此 \tilde{T} 的定义是有意义的。

定理 0.7 设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$, 则:

1. \tilde{T} 是 $V/(\text{null}T)$ 到 W 的线性映射;
2. \tilde{T} 是单的。
3. $\text{range}\tilde{T} = \text{range}T$
4. $V/\text{null}T$ 同构于 $\text{range}T$