度量空间以及由此引出的一些概念

zcl.space

目录

1 度量空间

定义 设X是一个集，它的元素叫做点，如果 X的任意两点 p和q联系于一个实数$d(p,q)$，叫做从p到q的 **距离**， 他们满足条件：

1. 如果$p \neq q$，那么 $d(p,q) > 0; d(p,p) = 0;$
2. $d(p,q) = d(p,p);$
3. 对于任意 $r \in X$, $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q);$

就称X是一个 **度量空间** 。

从定义可知，度量空间中有距离的概念。有距离才有度量，就像在Viterbi译码过程中，有欧氏距离或者汉明距离的定义，才会有幸存路径度量的概念。在度量空间中，距离函数的定义非常重要。最常见的度量空间是欧式空间R^k，特别是 R^1（实数轴）和 R^2（复平面）。在R^k中，距离定义为

$$d(x,y) = |x-y|, x, y \in R^k$$

2 由度量空间引出的一些定义

度量空间中有一些非常重要的概念。这些概念互相关联为度量空间中的分析奠定了基础，特别是以下几个概念的引出更是环环相扣(以下提到的点和集都是度量空间 X中的点和集)：

1. 点p的邻域 $N_r(p)$指的是满足条件 $d(p,q) < r$的一切点q所成的集。 r叫做$N_r(p)$的半径。
2. 点p叫做集E的极限点，如果 p的每个邻域都有一点 $q \in E$ 而 $q \neq p$。
3. 如果 $p \in E$但 p不是 E的极限点，则p是E的孤立点。
4. E是闭集，如果 E的每个极限点都是E的点.
5. 点p叫做E的内点，如果存在p的一个邻域N，有$N \subset E$。
6. E是开集，如果 E的所有点都是E的内点。

7. $\{p|p \in X, \notin E\}$构成E的余集E^c.

8. E叫做完全的，如果E是闭集，并且E的每个点都是E的极限点。

9. E叫做有界的，如果有一个实数M和一个点$q \in X$，使得一切$p \in E$都满足$d(p,q) < M$

10. E叫做在X中稠密，如果X的每个点或是E的极限点，或是E的点。

显然，在R^1中，邻域就是开区间；在R^2中，邻域就是圆的内部（不包含圆的边）。这里特别要强调的极限点的定义，根据极限点的定义，极限点有可能不是E的点。比如，在R^2中，对于集合$|z < 1|$，满足$z = 1$的那些点都是$|z < 1|$的极限点，但是这些点却不是$|z < 1|$的点。另外一个例子$\{\frac{1}{n}|n = 1, 2, \ldots\}$有一个极限点0，但是0却不是这个集合中的点。所以，对于集合拥有极限点和集合包含极限点是两个概念。

3　与开集闭集有关的定理及其证明

在Rudin的教材中，从度量空间以及刚才引出的那些定义出发，还有几个定理，如下：

定理 邻域必是开集

证明：假设有一邻域 $E = N_r(p)$，令 q是 E中的任意一点，于是有一正实数 h使得

$$d(p,q) = r - h$$

对于一切 $d(q,s) < h$ 的点 s，我们有

$$d(p,s) \le d(p,q) + d(q,s) < r - h + h = r$$

所以$s \in E$。因此, q是E的内点。

这个证明相当简洁，在证明过程中，两次用到邻域概念，一次用到开集概念。巩固了对开集和邻域定义的理解。

定理 如果p是集E的一个极限点，那么p的每个邻域都含有E的无限多个点。

证明：假设 p的某个邻域N只含有 E 的有限多个极限点，令 $q_1, \ldots, q_n$是 $N \cap E$ 中这有限个异于 p 的点。又令

$$r = \min_{1 \le m \le n} d(p, q_m)$$

显然有 $r > 0$。那么邻域 $N_r(p)$中不能再含有E的点q并且$q \ne p$。所以 p不是 E的极限点，矛盾。

定理 有限的点集没有极限点

定理 E是开集，当且仅当它的余集是闭集。

证明：首先假设 E^c是闭集，我们证明E是开集。假设$x \in E$，所以$x \notin E^c$。另外x也不可能是E^c的极限点（因为我们假设E^c是闭集，闭集所有的极限点都是该集合的点。）。于是x有一个邻域N，使得$N \cap E = \varnothing$，即：$N \subset E$。所以x是E的内点，所以E是开集。

反过来，假设E是开集，我们证明E^c是闭集。假设x是E^c的一个极限点，那么x的每个邻域都含有E^c的点，所以x不是E的内点。因为E是开集，所以$x \in E^c$，E^c是闭集。

这个定理的证明过程紧扣开集，闭集，极限点和内点的定义

定理 设 $\{E_\alpha\}$是若干（有限个或无限多个）集E_α的一个组，那么

$$(\bigcup_\alpha E_\alpha)^c = \bigcap_\alpha (E_\alpha^c)$$

证明：令 $A = (\bigcup_\alpha E_\alpha)^c$, $B = \bigcap_\alpha (E_\alpha^c)$，若$x \in A$，则$x \notin (\bigcup_\alpha E_\alpha)$，对于任意的$\alpha$，有$x \notin E_\alpha$，从而$\forall \alpha, x \in E_\alpha^c$，所以$x \in E_\alpha^c$，即 $A \subset B$.

反过来，如果$x \in B$，那么对于每个α，$x \in E_\alpha^c$。也即对于每个α，$x \notin E$。因此 $x \notin \bigcup_\alpha E_\alpha$。即$x \in (\bigcup_\alpha E_\alpha)^c$，于是$B \subset A$

定理 (a) 任意一组开集$\{G_\alpha\}$的并 $\bigcup_\alpha G_\alpha$是开集。(b) 任意一组闭集$\{F_\alpha\}$的交 $\bigcap_\alpha F_\alpha$是闭集。(c) 任意一组有限个开集 $G_1, \ldots, G_n$的交 $\bigcup_{i=1}^n G_i$是开集。(d) 任意一组有限个闭集 $F_1, \ldots, F_n$的并 $\bigcap_{i=1}^n F_i$是闭集。

证明：令$G=\bigcup_{\alpha} G_\alpha$。如果$x\in G$，就有某个$\alpha$，使得 $x\in G_\alpha$。从开集的定义出发（如果集合中所有的点都是内点，则该集合为开集），我们知道 x是G_α的内点，从而x也是G的内点。由于x的任意性，所以G是开集。这样我们就证明了定理的(a)。

接下来我们证明(b)：F_a是闭集，闭集的余集是开集，意味着 F_a^c是开集，根据(a)，我们有 $\bigcup_{\alpha} F_\alpha^c$是开集。我们还知道 **设** $\{E_\alpha\}$**是若干（有限个或无限多个）集**E_α**的一个组，那么**$(\bigcup_{\alpha} E_\alpha)^c=\bigcap_{\alpha}(E_\alpha^c)$ 。所以 $(\bigcap_{\alpha})^c$是开集。开集的余集是闭集，意味着 $\bigcap_{\alpha} F_\alpha$是闭集。

4 闭包及相关定理

今天还不是很累，觉得应该可以把闭包和相关的定理给学习完毕。

闭包 设X是度量空间，如果 $E\subset X$， $E^{'}$表示 E在X中所有极限点组成的集，那么，把$\overline{E}=E\cup E^{'}$叫做E的闭包。

解读：$E^{'}$中的点不一定属于E。$E^{'}$中的点是E在X中的极限点，根据极限点的定义，我们知道E的极限点不一定属于E。从而，$E^{'}$中的点也不一定属于E。E的闭包$\bar{E}$包含的点有属于E的点，也有不属于E的点。$\bar{E}$中属于E的那些点，或者是E的极限点，或者是E的孤立点。总之$E\subset\bar{E}$，但是$\bar{E}$不一定等于E。

定理 设X是度量空间，而$E\subset X$，那么 (a) $\bar{E}$;(b) $E=\bar{E}$当前仅当E闭;(c) 如果闭集$F\subset X$且$E\subset F$，那么$\bar{E}\subset F$。由(a)和(c)，$\bar{E}$是X中包含E的最小闭子集。

证明 如果$p\in X$而$p\notin\bar{E}$，根据闭包的定义，p既不是E的点，也不是E的极限点。因此，p有某个邻域与E不交。所以$\bar{E}$的余集是开集，因此$\bar{E}$是闭集。

证明(b)：如果$E=\bar{E}$，(a)表明E闭。如果E闭，那么E的极限点是E的点，那么$E^{'}\subset E$。所以$\bar{E}=E$。

证明(c)：如果F闭，且$F\subset X$，则$F^{'}\subset F$。根据闭集定义，F的所有极限点都属于F，即$F^{'}\subset F$，因此$E^{'}\subset F$，于是$\bar{E}\subset F$。

由(a)和(c)，我们知道 $\bar{E}$是X中包含E的最小闭子集。具体为，根据(c)，由于F的任意性，$\bar{E}$属于F。根据定义$\bar{E}=E\cup E^{'}$，我们知道$E\subset\bar{E}$。可以说，除了闭包$\bar{E}$外，任何包含E的闭集，都至少包含了闭包$\bar{E}$。这样说或许有些不严密，但是是一个理解过程。

解读 上面这个定理告诉我们，闭包是包含该集合的最小闭集。上述定理也提出了一种从一个集合构建包含该集合最小闭集的步骤。

定理 设E是一个非空实数集，上有界，令$y=\sup E$，那么$y\in\bar{E}$。特别的，如果E闭，那么，$y\in E$

证明 如果$y\in E$，那么$y\in\bar{E}$。接下来我们考虑$y\notin E$的情形，对于每个$h>0$,存在$x\in E$，使得$y-h<x<y$。因为如果这样的h不存在的话，$y-h$就是E的上界了。所以y是E的极限点。

解读 这是根据极限点的定义来的。(点p叫做集E的极限点，如果点p的每个邻域都含有一点$q\in E$而$q\neq p$)。鉴于h的任意性和x的任意性，在y的任意邻域内，总有一点属于E，所以y符合极限点的定义，故y是E的极限点。

定义X是度量空间，设$E\subset Y\subset X$，我们说E是X的开子集，就是说给每个$p\in E$配备一个正数r，使得$d(p,q)<r$ 和 $q\in X$ 能保证$q\in E$。p是E的内点。特别的，如果能给每个$p\in E$配备一个$r>0$，当$d(p,q)<r$且$q\in Y$时，就有$q\in E$，我们就说E关于Y是开的。一个集合可以关于Y是开的，然而却不是X的开子集。

比如开区间$(a,b)\subset R^1\subset R^2$。显然，对于每个$p\in(a,b)$，配备一个正数$r$，使得$d(p,q)<r$和$q\in R^2$，但是我们不能保证$q\in E$。因此$(a,b)$不是$R^2$的开子集。但是对于每个$p\in(a,b)$，配备一个整数$r$，使得$d(p,q)<r$和$q\in Y$。即$(a,b)$关于$Y$是开的。