练习：本证向量与上三角阵

张朝龙

目录

1 5.B.1

问题 设$T \in \mathcal{L}(V)$且存在正整数n使得$T^n = 0$:

1. 证明$I - T$是可逆的，且其逆为$(I-T)^{-1} = I + T + \ldots + T^{n-1}$
2. 解释一下如何想到上面公式。

解答:

$$
\begin{aligned}
(I-T)(I+T+\ldots T^{n-1}) &= (I+T+\ldots T^{n-1}) - (T+T^2+\ldots+T^{n-1}+T^n) && (1.1)\\
&= I && (1.2)
\end{aligned}
$$

2 5.B.2

问题 设$T \in \mathcal{L}(V)$且$(T-2I)(T-3I)(T-4I) = 0$，设λ是T的本征值，证明$\lambda = 2$ 或者 $\lambda = 3$，或者$\lambda = 4$

解答: 见定理*5.21*的证明过程。

3 5.B.3

问题 设$T \in \mathcal{L}(V)$,$T^2 = I$，且-1不是T的本征值。证明$T = I$

解答: 由$T^2 = I$得$(T-I)(T+I) = 0$，则T有特征值1或者-1，又因为-1不是T的特征值，则1是T的唯一特征值，所以$T = I$

4 5.B.4

问题 设$P \in \mathcal{L}(V)$,$P^2 = P$，证明$V = \text{null}P \oplus \text{range}P$

解答: 因为$P^2 = P$，则$P = 0$或者$P = I$。

当$P = 0$时，$\text{range}P = \{0\}$，$\text{null}P = V$，因此$V = \text{null}P \oplus \text{range}P$; 当$P = I$时，$\text{null}P = \{0$，$\text{range}P = V$，同样结论成立。

综上命题得证。

5 5.B.5

问题 设$S.T \in \mathcal{L}(V)$且S是可逆的。设$p \in \mathcal{P}(\mathbf{F})$是多项式。证明$p(STS^{-1}) = Sp(T)S^{-1}$

解答: 根据多项式定义:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \tag{5.1}$$

则有$p(STS^{-1})$ 为:

$$p(STS^{-1}) = a_0 I + a_1 STS^{-1} + a_2(STS^{-1}STS) + \dots \tag{5.2}$$

上式经过整理可以变为:

$$\begin{aligned}
p(STS^{-1}) &= a_0 I + a_1 STS^{-1} + a_2(STS^{-1}STS) + \dots && (5.3)\\
&= a_0 SIS^{-1} + a_1 STS^{-1} + a_2 ST^2S^{-1} + \dots && (5.4)\\
&= S(a_0 I + a_1 T + a_2 T^2 + \dots)S^{-1} && (5.5)\\
&= Sp(T)S^{-1} && (5.6)
\end{aligned}$$

6 5.B.6

问题 设$T \in \mathcal{L}(V)$且U是V的在T下不变的子空间，证明对每个多项式$p \in \mathcal{P}(\mathbf{F})$都有$U$在$p(T)$下不变。

解答: 根据多项式定义，对多项式的每一项进行分析即可。

7 5.B.7

问题 设$T \in \mathcal{L}(V)$，证明9是T^2的本征值当且仅当3或者-3是T的本征值。

解答: 假设λ是T的一个特征值，且对应的特征值向量是v，则

$$Tv = \lambda v$$

，所以:

$$T^2 v = T(\lambda v) = \lambda^2 v$$

对此进行扩展有:

$$p(T)v = p(\lambda)v$$

因此如果9是T^2的特征值则有：

$$T^2v = 9v$$

进而有：

$$(T-3I)(T+3I)v = 0$$

所以$T-3I$或者$T+3I$至少有一个不是单射，所以3或者-3是T的特征值。

8 5.B.8

问题 找出一个$T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$使得$T^4 = -I$

解答:

$$T(x,y) = (\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y, \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y) \tag{8.1}$$

9 5.B.9

问题 设V是有限维的，$T \in \mathcal{L}(V)$，$v \in V, v \neq 0$。设p是使得$p(T)v = 0$的次数最小的非零多项式。证明p的每个零点都是T的本征值。

10 5.B.10

问题 设$T \in \mathcal{L}(V)$，v是T的相应于本征值λ的本证向量。设$p \in \mathcal{P}(\mathbf{F})$，证明$p(T)v = p(\lambda)v$

解答: 我们证明过$T^n v = \lambda^n v$，因此对于：

$$p = \sum_{n=1}^{k} a_n x^n$$

有：

$$p(T)v = (\sum_{n=0}^{k} a_n T^n)v = \sum_{n=0}^{k} a_n \lambda^n v = p(\lambda)v \tag{10.1}$$

11 5.B.11

问题 设$\mathbf{F} = \mathbf{C}$,$T \in \mathcal{L}(V)$，$p \in \mathcal{P}(\mathbf{C})$是多项式，$\alpha \in \mathbf{C}$，证明$\alpha$是$p(T)$的本征值当且仅当$T$有一个本征值$\lambda$使得$\alpha = p(\lambda)$

解答： 首先假设α是$p(T)$的本征值，那么$p(T)-\alpha I$不是单射，把多项式$p(z)-\alpha$因式分解：

$$p(z)-\alpha = c(z-\alpha_1)\dots(z-\lambda_m) \tag{11.1}$$

上式意味着：

$$p(T)-\alpha I = c(T-\lambda_1 I)\dots(T-\lambda_m I) \tag{11.2}$$

因为$p(T)-\alpha I$不是单射，所以对于某个j，$T-\lambda_j I$不是单射。换句话说λ_j是T的特征值。所以$p(z)-\alpha=0$，即$\alpha=p(z)$

另一方面，假设存在某个特征值λ使得$\alpha = p(\lambda)$,所以存在非零向量$v\in V$，满足：

$$Tv=\lambda v \tag{11.3}$$

重复对左侧进行T映射，所以：

$$p(T)v=p(\lambda)v=av \tag{11.4}$$

即α是$p(T)$的一个特征值。

12 5.B.12

问题 证明若将$\mathbf{C}$换成$\mathbf{R}$，上题的结论将不在成立。

解答： 定义$T\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$为 $T(x,y)=(-y,x)$,定义$p\in\mathcal{P}(\mathbf{R})$为$p(x)=x^2$，那么$p(T)=T^2=-I$因此$-1$是$p(T)$的特征值，但是$T$没有实数域上的特征值。

13 5.B.13

问题 设W是复向量空间，并设$T\in\mathcal{L}(W)$没有本征值，证明：W在T下不变的子空间是$\{0\}$或者是无限维的。

解答： 反证法

14 5.B.14

问题 给出一个算子，它关于某个基的矩阵的对角线上只有0，但这个算子是可逆的。

解答: 这个很容易，对于二维空间有基e_1, e_2，定义算子$T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$：

$$Te_1 = e_2 \tag{14.1}$$

$$Te_2 = e_1 \tag{14.2}$$

显然这个映射对应的矩阵对角线上全是0，但是它是可逆的。

15 5.B.15

问题 给出一个算子，它关于某个基的矩阵的对角线上全是非零值，但是这个算子是不可逆的。

解答: 定义矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{15.1}$$

显然$T(0,1) = T(1,0) = (1,1)$

16 5.B.16

问题 利用将$p \in \mathcal{P}_n(\mathbf{C})$变为$(p(T))v \in V$的线性映射，证明:复向量空间上的算子都有本征值。

解答: 定义$\varphi(p) = p(T)v$：

$$\varphi : \mathcal{P}_n(\mathbf{C}) \to V \tag{16.1}$$

那么φ是一个线性映射，注意：$\dim \mathcal{P}_n(\mathbf{C}) = n+1$且$\dim V = n$所以$\varphi$不是单射，所以存在非零元素$p$使得$p(T)v = 0$.

剩下的和*5.21*的证明过程一样。