本证向量与上三角矩阵

目录

1 多项式作用于算子

算子理论比线性映射理论更加丰富多彩，主要原因是算子能自乘为幂。我们从算子的幂以及多项式作用于算子这一关键概念的定义开始。

若$T \in \mathcal{L}(V)$,则TT是有意义的，并且也包含于$\mathcal{L}(V)$。通常用T^2代替TT，更一般的，我们有：

定义 *1.1* 设$T \in \mathcal{L}(V)$,m是正整数。

1. 定义T^m为$T^m = \underbrace{T \cdots T}_{m}$
2. 定义T^0为V上的恒等算子I
3. 若T是可逆的，且逆为T^{-1},则定义T^{-m}为$T^m = (T^{-1})^m$

定义 *1.2* 设$T \in \mathcal{L}(V)$,$p \in \mathcal{P}(\mathbf{F})$，对$z \in \mathbf{F}$，有$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots a_m z^m$，则$p(T)$是定义为$p(T) = a_0 I + a_1 T + \ldots + a_m T^m$的算子。

例 *1.1* 设$D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathbf{R}))$是由$Dq = q^{'}$定义的微分算子，$p$是多项式$p(x) = 7 - 3x + 5x^2$，则$p(D) = 7I - 3D + 5D^2$。于是对每个$q \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$有$(p(D))q = 7q - 3q^{'} + 5q^{''}$

定义 *1.3* 若$p, q \in \mathcal{P}(\mathbf{F})$，则$pq \in \mathcal{P}(\mathbf{F})$的定义为：$\forall z \in \mathbf{F}, (pq)(z) = p(z)q(z)$

2 本征值的存在性

定理 *2.1* 有限维非零复向量空间上的每个算子都有本征值

证 设V是n维复向量空间，$n > 0$, 并设$T \in \mathcal{L}(V)$，取$v \in V$且$v \neq 0$，因为V是n维的，所以$n+1$个向量

$$v, Tv, T^2v, \ldots, T^nv$$

线性相关。于是有并且为零的复数$a_0, \ldots, a_n$使得：

$$0 = a_0v + a_1Tv + \ldots + a_nT^nv \qquad \square$$

注意$a_1, \ldots, a_n$不全为零，否则a_0也必须为0.

以这些a_j做一个多项式，利用代数学基本定理可以将此多项式分解为：

$$a_0 + a_1z + \ldots + a_nz^n = c(z-\lambda_1)\ldots(z-\lambda_m) \tag{2.1}$$

其中c是非零复数，每个λ_j都属于$\mathbf{C}$，且对于式 (2.1) 所有的$z \in \mathbf{C}$均成立。则：

$$0 = a_0v + a_1Tv + \ldots a_nT^nv \tag{2.2}$$

$$= (a_0I + a_1T + \ldots + a_nT^n)v \tag{2.3}$$

$$= c(T-\lambda_1)\ldots(T-\lambda_m)v \tag{2.4}$$

于是至少有一个j使得$T - \lambda_jI$不是单的，即有$v \neq 0$使得$(T-\lambda_jI)v = 0$，即有

$$Tv = \lambda v$$

3 上三角矩阵

定义 *3.1* 设$T \in \mathcal{L}(V)$，并设$v_1, \ldots, v_n$是V的基。T关于该基的矩阵定义为$n \times n$的矩阵：

$$\mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \ldots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \ldots & A_{n,n} \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

其元素$A_{j,k}$定义为：

$$T(v_k) = A_{1,k}v_1 + \ldots A_{n,k}v_n \tag{3.2}$$

我们发现：

1. 线性算子的矩阵是正方形方阵，越来越有意思了。
2. Tv_k写成$v_1,\ldots,v_n$的线性组合时使用的那些系数构成了矩阵$\mathcal{M}(T)$的第k列。

若T是$\mathbf{F}^n$的算子，且没有指定基，则假定为标准基。此时可以认为$\mathcal{M}(T)$的第j列维T作用到第j个标准基上得到的向量。

例 *3.1* 定义$T\in\mathcal{L}(\mathbf{F})^3$为$T(x,y,z)=(2x+y,5y+3z,8z)$,则：

$$\mathcal{M}(T)=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&5&3\\0&0&8\end{bmatrix}\tag{3.3}$$

对这个问题，我们有对于标准基，显然有：

$$\begin{aligned}T(1,0,0)&=(2,0,0)&&(3.4)\\T(0,1,0)&=(1,5,0)&&(3.5)\\T(0,0,1)&=(0,3,8)&&(3.6)\end{aligned}$$

线性代数的一个中心目标就是要证明，对于给定的算子$T\in\mathcal{L}(V)$，必定存在V的一个基，使得T关于该基有一个相当简单的矩阵。更直白的说法是，我们要选择V的基使得$\mathcal{M}(T)$有很多的0，这样我们把线性映射同构于矩阵，做矩阵运算时要简单得多。

若V是有限维的复向量空间，那么可以肯定的是V有一个基使得T关于这个基的矩阵的第一列除第一个元素之外全是0，也就是说,V有一个基使得T关于这个基的矩阵形状是：

$$\begin{bmatrix}\lambda & & \\ 0 & * & \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{bmatrix}\tag{3.7}$$

已知有限维复向量空间上的每个算子都有本征值，所以对于T一定有一个本征值λ和对应的本证向量v，把v扩张成V的一个基，则T关于这个基的矩阵就具有上面的形式。

上三角矩阵的条件：

定理 *3.1* 设$T\in\mathcal{L}(V)$，且$v_1,\ldots,v_n$是V的基，则一下条件等价：

1. T关于$v_1,\ldots,v_n$的矩阵是上三角的。

2. 对每个$j=1,\dots,n$都有$Tv_j \in span(v_1,\dots,v_j)$

3. 对每个$j=1,\dots,n$，有$\mathrm{span}(v_1,\dots,v_j)$在$T$下不变。

证 这几个命题的证明比较简单，但是证明过程需要对算子的矩阵有比较熟稔的记忆。假设$T\in\mathcal{L}(V)$，T是V上的线性算子，则T关于该基的矩阵定义为$n\times n$的矩阵：

$$A=\begin{bmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \dots & A_{n,n} \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

其中$A_{j,k}$定义为：

$$Tv_k = A_{1,k}v_1+\ldots+A_{n,k}v_k \tag{3.9}$$

注意V上算子关于基的矩阵是一个方阵，并且T和V上的基共同决定了A。比如V上的恒等映射就是一个单位矩阵。满足：

$$Tv_k = v_k$$

显然恒等映射T的特征值都是1，特征向量有n个，每个都是V的基。从恒等映射我们知道一个特征值可以对应多个特征向量。好了，现在让我们回到三角矩阵的条件。

首先从第1条到第二条。因为T关于$v_1,\dots,v_n$的矩阵是上三角的。所以

$$Tv_j = A_{1,j}v_1+\ldots A_{j,j}v_j+0v_{j+1}+\ldots+0v_n \tag{3.10}$$

显然$Tv_j\in\mathrm{span}(v_1,\dots,v_j)$

从第二条到第三条。我们知道：

$$\begin{aligned} Tv_1 &\in \mathrm{span}(v_1)\subset\mathrm{span}(v_1,\dots,v_j) \quad (3.11)\\ Tv_2 &\in \mathrm{span}(v_1,v_2)\subset\mathrm{span}(v_1,\dots,v_j) \quad (3.12)\\ &\vdots \quad (3.13)\\ Tv_j &\in \mathrm{span}(v_1,\dots,v_j) \quad (3.14) \end{aligned}$$

假设$v\in\mathrm{span}(v_1,\dots,v_j)$，则有 $Tv\in\mathrm{span}(v_1,\dots,v_j)$ 也就是说$\mathrm{span}(v_1,\dots,v_j)$在$T$下不变。

第三条说明什么？说明一个上三角阵以及对应的基具有一定的嵌套性质。比如我单独的把前j列拉出来，则这j列对应的基中的元素张成了一个T下的不变子空间，自成体系。 □

一个重要的定理：

定理 *3.2* 设V是有限维复向量空间,$T \in \mathcal{L}(V)$，则T关于V的某个基有上三角阵。

证 我们使用数学归纳法。若$\dim V = 1$，则结论是显然的，一定有$Tv = \lambda v$。

假设$\dim V > 1$，并对所有维数比V小的复向量空间结论都成立。设λ是V的本征值，设：

$$U = \operatorname{range}(T - \lambda I) \tag{3.15}$$

我们知道$T - \lambda I$不是满的，因为有$v \in \operatorname{null}(T - \lambda I)$。根据线性映射基本定理$\dim(T - \lambda I) + \operatorname{range}(T - \lambda I) = \dim V$ 所以$\dim U < \dim V$.

接下来我们证明：U在T下不变。对于$u \in U$，有：

$$Tu = (T - \lambda I)u + \lambda u \tag{3.16}$$

显然$(T - \lambda I)u \in U, \lambda u \in U$ ，所以$Tu \in U$，因此T在U下不变。

因此$T|_U$是U上的算子，有归纳法假设知，U有基$u_1, \ldots, u_m$使得$T|_U$对应的矩阵为上三角阵。因此对每个j都有：

$$Tu_j = (T|_U)(u_j) \in \operatorname{span}(u_1, \ldots, u_j) \tag{3.17}$$

把$u_1, \ldots, u_m$扩充称V的基$u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$，对每个$k$都有：

$$Tv_k = (T - \lambda I)v_k + \lambda v_k \tag{3.18}$$

U的定义表明$(T - \lambda I)v_k \in U = \operatorname{span}(u_1, \ldots, u_m)$，因此上式可得：

$$Tv_k \in \operatorname{span}(u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_k) \tag{3.19}$$

根据式 *(3.17)(3.19)*可以知道T关于基$u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$有上三角阵。 □

接下来给出第二种证明。

证 我们仍然对V的维数用归纳法。若$\dim V = 1$，则结论显然成立。

现在假设$\dim V = n > 1$，并设对于所有$n - 1$的复向量空间结论成立。设v_1是T的任意一个本证向量，设$U = \operatorname{span}(v_1)$,则$U$是$T$的不变子空间且$\dim U = 1$.

由于$\dim V/U = n - 1$，我们可以对$T/U \in \mathcal{L}(V/U)$用归纳法假设。于是V/U有一个基$v_2 + U, \ldots, v_n + U$使得T/U关于该基有上三角矩阵。则对于每个$j = 2, \ldots, n$，有：

$$(T/U)(v_j + U) \in \operatorname{span}(v_2 + U, \ldots, v_j + U) \tag{3.20}$$

对于式 (3.20)我们有：

$$Tv_j \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_j) \tag{3.21}$$

于是，T关于V的基$v_1, \ldots, v_n$具有上三角矩阵。 □

如何通过观察一个算子的矩阵来确定概算子是否可逆？如果我们很幸运的有一个基使得该算子关于这个基的矩阵是上三角的，那么这个问题就会变得很简单。

定理 *3.3* 设$T \in \mathcal{L}(V)$关于V的某个基有上三角矩阵。则T是可逆的当且仅当这个上三角矩阵上的元素都不是*0*.

证 设$v_1, \ldots, v_n$是V的基使得T关于这个基具有上三角阵：

$$\mathcal{M}(T) =$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

我们需要证明：T是可逆的当且仅当所有λ_i均不为0 首先设对角线元素$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$均不为0，则有：

$$Tv_1 = \lambda_1 v_1$$

。因为$\lambda_1 \neq 0$ 所以有

$$T(v_1/\lambda_1) = v_1$$

，即$v_1 \in \operatorname{range}(T)$。现在对于某个$a \in \mathbf{F}$，有：

$$T(v_2/\lambda_2) = av_1 + v_2$$

上式的左端和av_1都包含于range(T)，于是$v_2 \in \operatorname{range}(T)$。

依次类推，$v_1, \ldots, v_n \in \operatorname{range}(T)$，因为$v_1, \ldots, v_n$是$V$的基，所以range$(T) = V$，也就是$T$是满的，于是$T$是可逆的。

现在完成另一个方向的证明。假设T是可逆的，显然有$\lambda_1 \neq 0$，不然$Tv_1 = 0$，说明null$(T) \neq \{0\}$，这与T可逆矛盾。设$\lambda_j \neq 0, 1 < j \leq n$，式 (5) 表明$T$将span$(v_1, \ldots, v_j)$映射如span$(v_1, \ldots, v_j)$，我们知道$\dim \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_{j-1}) = j - 1$, $\dim \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_j) = j$，所以$T$将一个大的空间映射到了一个小的空间，null$(T) \neq \{0\}$，所以$T$不是可逆的。与假设矛盾。

综上T是可逆的。 □

值得注意的是，现在我们还无法利用算子的矩阵来精确计算算子的本征值。但是，如果我们有幸找到一个基使得算子关于这个基的矩阵是上三角的，则本征值的计算问题就变得平凡了。

定理 *3.4* 设$T \in \mathcal{L}(V)$关于V的某个基有上三角矩阵。则T的本征值恰为这个上三角矩阵对角线上的元素。

证 设$v_1, \ldots, v_n$是V的基，并且T关于这个基有上三角元素：

$$\mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

□

设$\lambda \in \mathbf{F}$，则：

$$\mathcal{M}(T - \lambda I) = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda & & & * \\ & \lambda_2 - \lambda & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n - \lambda \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

因此$T - \lambda I$不可逆当且仅当λ等于$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$中的某一个。于是$\lambda$是$T$的本征值当且仅当$\lambda$等于$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$中的某一个。