内积与范数

目录

1 内积

定义 *1.1* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$的范数为：

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \tag{1.1}$$

范数在$\mathbf{R}^n$上不是线性的，为了把线性引入讨论，定义点积：

定义 *1.2* 对于$x, y \in \mathbf{R}^n$，x和y的点积$x \cdot y$定义为：

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \ldots x_n y_n \tag{1.2}$$

其中$x = (x_1, \ldots, x_n)$，$y = (y_1, \ldots, y_n)$

注意$\mathbf{R}^n$中两个向量的点积是一个数。对所有的$x \in \mathbf{R}^n$，均有$x \cdot x = ||x||^2$，$\mathbf{R}^n$上的点积具有如下性质：

1. 对所有$x \in \mathbf{R}^n$，均有$x \cdot x \geq 0$
2. $x \cdot x = 0$，当且仅当$x = 0$
3. 对于固定的$y \in \mathbf{R}^n$，$\mathbf{R}^n$到R的将$x \in \mathbf{R}^n$变为$x \cdot y$的映射是线性的。
4. 对所有$x, y \in \mathbf{R}^n$，有$x \cdot y = y \cdot x$

内积是点积的推广。定义内积就是抽象化点积的过程：

定义 *1.3* V上的内积就是一个函数，把V中的元素的每个有序对u,v都映成一个数$\langle u,v\rangle$ 并且具有以下性质：

1. 对所有的$v\in V$，有$\langle v,v\rangle\geq 0$
2. $\langle v,v\rangle=0$，当且仅当$v=0$
3. 对所有$u,v,w\in V$，均有$\langle u+v,w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle$
4. 对所有$\lambda\in\mathbf{F}$和所有$u,v\in V$，有$\langle\lambda u,v\rangle=\lambda\langle u,v\rangle$
5. 对所有$u,v\in V$，有$\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}$

例 *1.1* $\mathbf{F}^n$上的欧几里得内积定义为：

$$\langle(w_1,\ldots,w_n),(z_1,\ldots,z_n)\rangle=w_1\bar{z_1}+\ldots+w_n\bar{z_n} \tag{1.3}$$

例 *1.2* 若$c_1,\ldots,c_n$均为正数，则可以定义$\mathbf{F}^n$上的内积：

$$\langle(w_1,\ldots,w_n),(z_1,\ldots,z_n)\rangle=c_1w_1\bar{z_1}+\ldots+c_nw_n\bar{z_n} \tag{1.4}$$

例 *1.3* 在定义区间$[-1,1]$上的实值连续函数构成的向量空间上可定义内积如下：

$$\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x \tag{1.5}$$

例 *1.4* 在$\mathcal{P}(\mathbf{R})$上可定义内积如下：

$$\langle p,q\rangle=\int_{0}^{\infty}p(x)q(x)e^{-x}\mathrm{d}x \tag{1.6}$$

定义 *1.4* 内积空间就是带有内积的向量空间 V

内积空间最重要的例子是$\mathbf{F}^n$，当我们说$\mathbf{F}^n$是内积空间的时候，我们总假设采用的是欧几里得内积。

定理 *1.1*

1. 对每个确定的$u\in V$，将v变为v,u的函数是V到$\mathbf{F}$的线性映射。
2. 对每个$u\in V$，均有$\langle 0,u\rangle=0$
3. 对每个$u\in V$，均有$\langle u,0\rangle=0$
4. 对所有$u,v,w\in V$均有$\langle u,v+w\rangle=\langle u,v\rangle+\langle u,w\rangle$
5. 对所有$\lambda\in\mathbf{F}$和所有$u,v\in V$均有$\langle u,\lambda v\rangle=\bar{\lambda}\langle u,v\rangle$

2 范数

定义 *2.1* 对于$v \in V$，v的范数$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$

例 *2.1* 若$(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{F}^n$，则：

$$\|(z_1, \ldots, z_n)\| = \sqrt{|z_1|^2 + \Gamma \ldots + |z_n|^2} \tag{2.1}$$

例 *2.2* 在$[-1, 1]$上的实值连续函数构成的向量空间中有：

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} (f(x))^2 \mathrm{d}x} \tag{2.2}$$

范数的基本性质：

定理 *2.1* 设$v \in V$

1. $\|v\| = 0$ 当且仅当$v = 0$

2. 对所有$\lambda \in \mathbf{F}$均有$\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$

通常，处理范数的平方要比直接处理范数更容易。

定义 *2.2* 两个向量$u, v \in V$是正交的，如果$\langle u, v\rangle = 0$

若u, v是$\mathbf{R}^2$中的非零向量，则：

$$\langle u, v\rangle = \|u\|\|v\| \cos\theta \tag{2.3}$$

其中θ是u和v的夹角，显然在平面几何的意义下，正交意味着垂直。

定理 *2.2* *1.* 0正交与V中的任意向量。

2. 0是V中唯一一个与自身正交的向量。

定理 *2.3* 设u和v是V中的正交向量，则$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

证

$$\begin{aligned}
\|u + v\|^2 &= \langle (u + v), (u + v)\rangle && (2.4)\\
&= \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle && (2.5)\\
&= \langle u, u\rangle + \langle v, v\rangle && (2.6)\\
&= \|u\|^2 + \|v\|^2 && (2.7)
\end{aligned}$$

□

设$u, v \in V$，且$v \neq 0$，我们想把u写成v的标量倍加上一个正交与v的向量w。如图1所示：

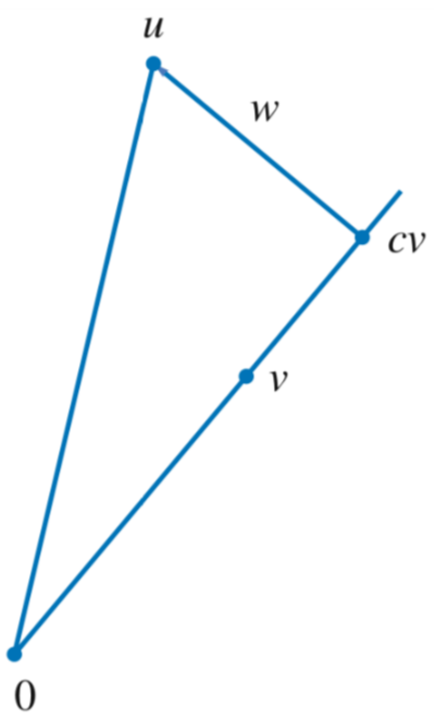

图 1: 正交分解

为了揭示如何将u写成v的标量倍加上一个正交于v的向量，令$c \in \mathbf{F}$表示一个标量，则：

$$u = cv + (u - cv)$$

因此需要选取c使得v正交于$u - cv$，也就是说我们希望：

$$0 = \langle u - cv, v\rangle = \langle u, v\rangle - c\|v\|^2$$

上式表明c应该是

$$\langle u, v\rangle / \|v\|^2$$

从而

$$u = \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2} v + (u - \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2} v)$$

上式把u写成了v的标量倍加上一个正交于v的向量。

定理 *2.4* 设$u, v \in V$且$v \neq 0$，令$c = \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}, w = u - \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2} v$则$\langle w, v\rangle = 0$，且$u = cv + w$

定理 *2.5* 设$u, v \in V$，则 $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$，等号成立当且仅当$u, v$之间存在标量倍的关系。

证 我们把u分解为：

$$u = w + \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2} v$$

其中w正交与v，根据勾股定理，我们有：

$$\begin{aligned}
\|u\|^2 &= \left\| \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2} v \right\|^2 + \|w\|^2 \qquad (2.8)\\
&= \frac{\|\langle u, v\rangle\|^2}{\|v\|^2} + \|w\|^2 \qquad (2.9)\\
&\geq \frac{\|\langle u, v\rangle\|^2}{\|v\|^2} \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

□

柯西施瓦茨不等式的例子

例 *2.3* 若$x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbf{R}$，则：

$$|x_1 y_1 + \ldots x_n y_n|^2 \leq (x_1^2 + \ldots x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2) \tag{2.11}$$

例 *2.4* 若f, g均为$[-1, 1]$上的实值连续函数，则：

$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx \right|^2 \leq \left(\int_{-1}^{1} (f(x))^2 dx \right) \left(\int_{-1}^{-1} (g(x))^2 dx \right) \tag{2.12}$$

定理 *2.6* 设$u, v \in V$，则$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$，等号成立当且仅当$u, v$之一是另一个的标量倍。

证

$$
\begin{aligned}
\|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle && (2.13)\\
&= \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle && (2.14)\\
&\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| && (2.15)\\
&= (\|u\| + \|v\|)^2 && (2.16)
\end{aligned}
$$

所以 $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ □

定理 *2.7* 设$u, v \in V$，则$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$

证

$$
\begin{aligned}
\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle + \langle u-v, u-v\rangle && (2.17)\\
&= \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle && (2.18)\\
&+ \langle u,u\rangle + \langle u,-v\rangle + \langle -v,u\rangle + \langle -v,-v\rangle && (2.19)\\
&= 2\langle u,u\rangle + 2\langle v,v\rangle && (2.20)\\
&= 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) && (2.21)
\end{aligned}
$$

□