练习：零空间和值域

张朝龙

目录

1 3.B.1

问题 给出线性映射T使得$\dim nullT = 3$且$\dim rangeT = 2$

解答: 根据线性映射基本定理$\dim V = \dim nullT + \dim rangeT$，有$\dim V = 5$.

所以我们可以定义一个维度为5的向量空间$V = \mathbf{R}^5$，并令这个空间的基为$e_1, \ldots, e_5$，其中e_i是第i个元素为1，其他元素为零的向量。接下来我们定义线性映射T：

$$T(e_1) = 0 \tag{1.1}$$

$$T(e_2) = 0 \tag{1.2}$$

$$T(e_3) = 0 \tag{1.3}$$

$$T(e_4) = e_5 \tag{1.4}$$

$$T(e_5) = e_4 \tag{1.5}$$

根据线性映射的定义，我们可以证明T是线性映射，满足齐次可加性。另外根据定义，$e_1, e_2, e_3 \in nullT$，并且$nullT = span(e_1, e_2, e_3)$，所以$\dim nullT = 3$，根据线性映射基本定理$\dim rangeT = 2$

注意我们定义线性映射T的时候最好写成定义线性映射$T : \mathcal{L}(V, V)$，即T是自身到自身的映射。

2 3.B.2

问题 设V是向量空间，$S, T \in \mathcal{L}(V, V)$使得$rangeS \subset nullT$，证明$(ST)^2 = 0$

解答： 因为$rangeS \subset nullT$，所以对于任何$s \in rangeS$有$Ts = 0$，所以有$TS = 0$，对于$(ST)^2$，我们可以展开如下：

$$\begin{aligned}(ST)^2 &= (ST)(ST) \\ &= S(TS)T \\ &= S0T \\ &= 0\end{aligned}$$

3 3.B.3

问题 设$v_1, \ldots, v_m$是V中的向量组，定义$T \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^m, V)$，如下：

$$T(z_1, \ldots, z_m) = z_1 v_1 + \ldots + z_m v_m$$

1. *T的什么性质相当于$v_1, \ldots, v_m$张成V?*
2. *T的什么性质相当于$v_1, \ldots, v_m$是线性无关的？*

解答：

1. 相当于T满足什么条件才有$span(v_1, \ldots, v_m) = V$？我们知道张成组的定义是指$V$中的任意向量都可以写成$v_1, \ldots, v_m$的线性组合。而对于:

   $$T(z_1, \ldots, z_m) = z_1 v_1 + \ldots + z_m v_m$$

   说明T的值域是$v_1, \ldots, v_m$的线性组合。即$rangeT = \{v : v = z_1 v_1 + \ldots + z_m v_m\}$，只要$rangeT = V$和$span(v_1, \ldots, v_m) = V$是等效的。即$T$是满射。

2. $v_1, \ldots, v_m$是线性无关的相当于$z_1 v_1 + \ldots + z_m v_m = 0$只有一种写法$z_i = 0$。这意味着$(z_1, \ldots, z_m) = \underbrace{(0, \ldots, 0)}_{m}$，即对于$T$来说只有$T0 = 0$。显然$T$必须有$nullT = \{0\}$，即$T$是单射。

4 3.B.4

问题 证明$\{T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^5, \mathbf{R}^4) : \dim nullT > 2\}$不是$\mathcal{L}(\mathbf{R}^5, \mathbf{R}^4)$的子空间。

解答： 因为$\dim nullT = \dim \mathbf{R}^5 - \dim rangeT$,且$\dim rangeT = \dim \mathbf{R}^4 = 4$，所以有$\dim nullT = 1$. 所以$\mathcal{L}(\mathbf{R}^5, \mathbf{R}^4)$是$nullT = 1, rangeT = 4$构成的线

性映射组成的空间。$\{T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^5, \mathbf{R}^4) : \dim nullT > 2\}$和$\{T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^5, \mathbf{R}^4) : \dim nullT = 1\}$是互斥的，证明完毕。

看了答案之后，发现答案中直接给出了一个特例。有时候举出一个反例会大大的简化证明。

后来仔细想想我的证明过程有一个地方出现了差错：我武断的认为$\dim rangeT = \dim \mathbf{R}^4 = 4$，其实题目并没有说$T$是满射。$\dim rangeT$不一定等于$\dim \mathbf{R}^4 = 4$. 所以还是给定一个反例比较好。

5 3.B.5

问题 给出线性映射$T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$，使得$rangeT = nullT$

解答： 因为$\dim \mathbf{R}^4 = 4$，$rangeT = nullT$ 根据线性映射基本定理，$\dim rangeT = \dim nullT = 2$所以这个映射是存在的。

假设e_1, e_2, e_3, e_4是$\mathbf{R}^4$的一个基，定义$T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$满足：

$$\begin{aligned} T(e_1) &= 0 \\ T(e_2) &= 0 \\ T(e_3) &= e_1 \\ T(e_4) &= e_2 \end{aligned}$$

则有 $nullT = rangeT = \{e_1, e_2\}$

6 3.B.6

问题 证明不存在线性映射$T : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^5$，使得$rangeT = nullT$

解答： 假设存在这样的线性映射T，满足$rangeT = nullT$，即$\dim rangeT = \dim nullT$。根据线性映射基本定理$\dim \mathbf{R}^5 = 5$，有$\dim rangeT = \dim rangenullT = 2.5$，这是不可能的。矛盾。得证。

7 3.B.7

问题 设V和W都是有限维的，且$2 \le \dim V \le \dim W$。证明$\{T \in \mathcal{L}(V, W) : nullT \neq 0\}$ 不是$\mathcal{L}(V, W)$的子空间。

解答： 假设$v_1,\ldots,v_n$是V的一个基，w_1,w_m是W的一个基，因为 $2\le \dim V\le \dim W$ 所以$2\le n\le m$。

假设$T_1,T_2\in\{T\in\mathcal{L}(V,W):nullT\ne 0\}$，并且对于$T_1$则有：

$$T_1v_1=0,T_1v_i=w_i,i=2,\ldots,n \tag{7.1}$$

对于T_2有:

$$T_2v_1=w_1,T_2v_2=0,T_2v_i=w_i,i=3,\ldots,n \tag{7.2}$$

但是我们有：

$$(T_1+T_2)v_1=w_1,(T_1+T_2)v_2=v_2,(T_1+T_2)v_i=2w_i,i=3,\ldots,n \tag{7.3}$$

因为$w_1,w_2,2w_i,i=3,\ldots,n$是线性无关的，则有$T_1+T_2$是单射,$nullT=\{0\}$。所以$\{T\in\mathcal{L}(V,W):nullT\ne 0\}$不是$\mathcal{L}(V,W)$的子空间。

8 3.B.8

问题 设V和W都是有限维的，且$\dim V\ge\dim W\ge 2$，证明$\{T\in\mathcal{L}(V,W):rangeT\ne W\}$不是$\mathcal{L}(V,W)$的子空间。

解答： 假设$v_1,\ldots,v_n$是V的一个基，w_1,w_m是W的一个基，因为 $2\le\dim W\le\dim V$ 所以$2\le m\le n$。

假设$T_1,T_2\in\{T\in\mathcal{L}(V,W):rangeT\ne W\}$，并且对于$T_1$则有：

$$T_1v_1=0,T_1v_i=w_i,i=2,\ldots,m \tag{8.1}$$

对于T_2有:

$$T_2v_1=w_1,T_2v_2=0,T_2v_i=w_i,i=3,\ldots,m \tag{8.2}$$

但是我们有：

$$(T_1+T_2)v_1=w_1,(T_1+T_2)v_2=v_2,(T_1+T_2)v_i=2w_i,i=3,\ldots,m \tag{8.3}$$

因为$w_1,w_2,2w_i,i=3,\ldots,m$是线性无关的，则有$T_1+T_2$是满射,$rangeT=W$。所以$\{T\in\mathcal{L}(V,W):rangeT\ne W\}$不是$\mathcal{L}(V,W)$的子空间。

9 3.B.9

问题 设$T \in \mathcal{L}(V,W)$是单的，$v_1,...,v_n$在V中线性无关。证明$Tv_1,...,Tv_n$在W中线性无关。

解答： 按照线性组合的定义，假设存在a_i使得

$$a_1Tv_1 + ... + a_nTv_n = 0$$

根据线性映射的齐次可加性有：

$$T(a_1v_1 + ... + a_nv_n) = 0$$

显然$a_1v_1 + ... + a_nv_n \in nullT$。又因为$T$是单的，则必有$nullT = \{0\}$，所以：

$$a_1v_1 + ... + a_nv_n = 0$$

又因为$v_1,...,v_n$是线性无关的。根据线性无关的定义，必有$a_i = 0, \forall a_i$

所以有$Tv_1,...,Tv_n$是线性无关的。

10 3.B.10

问题 设$v_1,...,v_n$张成V，并设$T \in \mathcal{V}, \mathcal{W}$，证明$Tv_1,...,Tv_n$张成$rangeT$。

解答： 因为$v_1,...,v_n$张成V，则有对于$v \in V$存在$a_i,...,a_n$使得

$$a_1v_1 + ... + a_1v_n = v$$

对两边进行线性映射，有：

$$\begin{aligned} T(a_1v_1 + ... + a_1v_n) &= Tv \\ a_1Tv_1 + ... + a_1Tv_n &== Tv \end{aligned}$$

我们知道$Tv \in rangeT$，又因为v的任意性，所以$Tv_1,...,Tv_n$张成了$rangeT$

11 3.B.11

问题 设$S_1,...,S_n$均为单的线性映射，且$S_1S_2...S_n$有意义，证明$S_1S_2...S_n$是单射。

解答： 对于这个题目的证明我想采用数学归纳法。显然当$n=1$的时候，原命题成立。

假设当$n=m$时，$S_1S_2\ldots S_m$是单射，令$S=S_1S_2\ldots S_m$，则接下来证明SS_{m+1}是单射。

因为S_{m+1}是单射所以$nullS_{m+1}=\{0\}$，假设SS_{m+1}不是单射，则必有$v\neq 0, v\in nullSS_{m+1}$使得 $SS_{m+1}\neq 0$。

$$SS_{m+1}v = 0 \tag{11.1}$$

$$S(S_{m+1}v) = 0 \tag{11.2}$$

因为S是单射,所以$S_{m+1}v=0$，又因为S_{m+1}也是单射所以$v=0$，矛盾。所以必有SS_{m+1}也是单射。

这个题目说明，单射的组合任然是单射。

12 3.B.12

问题 设T是有限维的，$T\in\mathcal{L}(V,W)$.证明V有一个子空间U使得$U\cap nullT=\{0\}$且$rangeT=\{Tu:u\in U\}$.

解答： 这个题目采用了和*2.43*以及*3.22*相同的证明思路。刚开始，我想看答案。后来居然给想出来了。我发誓：以后一个题目不思考一个星期不看答案。必须改掉答案依赖症。更多的锻炼思考能力。闲话少说，接下来给出证明过程。

首先我们知道$nullT$是V的子空间，假设$v_1,\ldots,v_m$是$nullT$的一组基，则可以把这组基扩展为V的一组基：$v_1,\ldots,v_m,w_1,\ldots,w_n$，接下来我们考察$U=span(w_1,\ldots,w_n)$，首先我们知道$w_1,\ldots,w_n$是$U$的一组基（线性无关又张成$U$）。

令$u\in U\cap nullT$，则存在$a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_n\in\mathbf{F}$使得*:*

$$u=a_1v_1+\ldots+a_mv_m=b_1w_1+\ldots+b_nw_n \tag{12.1}$$

得：

$$a_1v_1+\ldots+a_mv_m-b_1w_1-\ldots-b_nw_n=0 \tag{12.2}$$

因为$v_1,\ldots,v_m,w_1,\ldots,w_n$线性相关，则有：

$$a_i=0,b_j=0,i=1,\ldots,m,j=1,\ldots,n$$

所以$u=0$，即$U\cap nullT=\{0\}$.

我们知道$rangeT=\{Tv:v\in V\}$，对任意的$v\in V$都存在$a_i\in\mathbf{F},b_j\in\mathbf{F},i=1,\ldots,m;j=1,\ldots,n$使得：

$$v=a_1v_1+\ldots+a_mv_m+b_1w_1+\ldots+b_nw_n \tag{12.3}$$

得：

$$Tv=T(b_1w_1+\ldots+b_nw_n) \tag{12.4}$$

上式右边没有了系数为a_i的项，是因为$v_i\in nullT$. 又因为$u=b_1w_1+\ldots+b_nw_n\in U$，又因为$v$的任意性，所以：

$$\{Tv:v\in V\}=\{Tu:u\in U\} \tag{12.5}$$

即$rangeT=\{Tu:u\in U\}$

综上$U=span(w_1,\ldots,w_n)$就是我们要找的V的子空间。

13 3.B.13

问题 设T是从$\mathbf{F}^4$到$\mathbf{F}^2$的线性映射使得$nullT=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbf{F}^4:x_1=5x_2,x_3=7x_4\}$，证明$T$是满的。

解答： 根据线性映射基本定理$\dim V=\dim nullT+\dim rangeT$，结合$\dim nullT=2$我们有$\dim rangeT=2$。

14 3.B.14

问题 设U是$\mathbf{R}^8$的一个3维子空间，T是$\mathbf{R}^8$到$\mathbf{R}^5$的一个线性映射使得$nullT=U$，证明T是满的。

解答： 根据线性映射基本定理，$\dim V=\dim nullT+\dim rangeT$,我们有$\dim rangeT=8-3=5$.

线性映射基本定理用的非常广泛，要把其证明过程仔细掌握了。

15 3.B.15

问题 证明不存在零空间等于$\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbf{F}^5:x_1=3x_2,x_3=x_4=x_5\}$的$\mathbf{F}^5$到$\mathbf{F}^2$的线性映射。

解答： 这个证明还是重点使用线性映射基本定理。易知，题目中所给零空间的维度是2，根据线性映射基本定理$\dim V = \dim nullT + \dim rangeT$。所以$\dim rangeT = 3$. 而$\mathbf{F}^2$的维度是2。

在$\mathbf{F}^2$中不可能存在维度是3的空间。

16 3.B.16

问题 假设在V上存在一个线性映射，其零空间和值域都是有限维的，证明V是有限维的。

解答： 线性映射基本定理：$\dim V = \dim nullT + \dim rangeT$

17 3.B.17

问题 设V和W都是有限维的。证明存在一个V到W的单的线性映射当且仅当$\dim V \leq \dim W$。

解答： 单射的等价条件是$nullT = \{0\}$，即$\dim nullT = 0$。根据线性映射基本定理*:*

$$\dim nullT = \dim V - \dim rangeT$$

因为$\dim rangeT \leq \dim W$，所以$\dim nullT \geq \dim V - \dim W \leq 0$ 所以存在$\dim nullT = 0$的线性映射。

18 3.B.18

问题 设V和W都是有限维的。证明存在一个V到W的满的线性映射当且仅当$\dim V \geq \dim W$

解答： 根据线性映射基本定理：

$$\begin{aligned} \dim W = \dim rangeT &= \dim V - \dim nullT \\ &\leq \dim V \end{aligned}$$

证明另外一个方向，当$\dim V \geq \dim W$时，存在V到W满射。设$v_1, \ldots, v_m$是V的一个基，$w_1, \ldots, w_n$是W的一个基。因为$\dim V \geq \dim W$则有$m \geq n$。定义线性

映射使得：

$$T(a_1v_1 + \dots a_mv_m) = a_1w_1 + \dots a_nw_n$$

因为$m \geq n$，所以上式右边a_nw_n是有意义的。又因为$w_1, \dots, w_n$是W的基。所以$(range\ T = W)\backslash$

19 3.B.19

问题 设V和W都是有限维的，且U是V的子空间。证明存在$T \in \mathcal{L}(V, W)$使得$nullT = U$当且仅当$\dim U \geq \dim V - \dim W$

解答： 我们首先证明从$T \in \mathcal{L}(V, W)$和$nullT = U$可以推出$\dim U \geq \dim V - \dim W$.

根据线性映射基本定理，有:

$$\begin{aligned} \dim nullT &= \dim V - \dim rangeT \\ &\geq \dim V - \dim W \end{aligned}$$

结合$\dim U = \dim nullT$，所以有

$$\dim U \geq \dim V - \dim W$$

然后我们从$\dim U \geq \dim V - \dim W$推出存在$T \in \mathcal{L}(V, W)$使得$nullT = U$.

假设$u_1, \dots, u_m$是U的一个基，把这个基扩展为V的一个基$u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$，令$w_1, \dots, w_q$是$W$的一个基。定义线性映射：

$$T(a_1u_1 + \dots + a_mu_m + b_1v_1 + \dots b_nv_n) = b_1w_1 + \dots b_nw_n \tag{19.1}$$

因为$\dim U \geq \dim V - \dim W$所以有$q \geq n$，所以上式$b_nw_n$是有意义的。所以有$nullT = U$且$T \in \mathcal{L}(V, W)$

20 3.B.20

问题 设W是有限维的，$T \in \mathcal{L}(V, W)$。证明T是单的当且仅当存在$S \in \mathcal{L}(V, W)$使得ST是V上的恒等映射