

多项式系数及其妙用

zcl.space

目录

1 多项式系数	1
2 多项式定理	2
3 淘汰赛场次问题	3
4 方程整数解个数	3
5 一个应用	4

1 多项式系数

一个有意思的问题：把 n 个不同的元素分成 r 组，每组分别有 n_1, \dots, n_r 个元素， $\sum_{i=1}^r n_i = n$ ，一共有多少种方法？

要解决这个问题，我们可以把这个问题分成多个步骤：

1. 在 n 个元素中选择 n_1 个作为第一组，一共有 $\binom{n}{n_1}$ 中选择方法；
2. 在剩下的 $n - n_1$ 个元素中选择 n_2 个作为第二组，一共有 $\binom{n-n_1}{n_2}$ 中选择方法；
3. 在剩下的 $n - n_1 - n_2$ 个元素中选择 n_3 个作为第三组，一共有 $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ 中选择方法；
4. 依次类推，经过了 $n_r - 1$ 步，从剩下的 $n - n_1 - \dots - n_{r-1}$ 个元素中选取 n_r 个元素作为第 n_r 组，一共有 $\binom{n-n_1-\dots-n_{r-1}}{n_r}$



综上, 可能的分法一共有:

$$\binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \cdots \binom{n-n_1-\dots-n_{r-1}}{n_r} \quad (1.1)$$

$$= \frac{n!}{(n-n_1)!n_1!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)!n_2!} \cdots \frac{(n-n_1-\dots-n_{r-1})!}{0!n_r!} \quad (1.2)$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_r!} \quad (1.3)$$

从上面的计算过程我们可以看到, 这个式子和 [排列组合分析一文](#) 中的式 1 完全一样。因此我们可以考虑:

排列 假设有 n 个互不相同的元素, 则一共有 $n!$ 个排列结果。如果这 n 个元素, 其中 n_1 个彼此相同, 另 n_2 个彼此相同, 依次类推, n_r 个也彼此相同, 那么一共排列的个数为:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_r!} \quad (1.4)$$

如此, 我们可以把这 n 个元素都打上标记, 其中有 n_1 个 1, 有 n_2 个 2, 等等等等, 有 n_r 个 r , 则我们把这些标记做个排列, 每次排列后, 把标记为 1 位置上的 n_1 个元素归类为 n_1 , 把标记 2 对应的 n_2 个元素归类为第二组, 依次类推把标记 r 对应的元素归类为第 r 组。那么将 n 个元素分成大小为 n_1, n_2, \dots, n_r 这样不同 r 组的分法数量, 与 n 个值中, n_1 相同, n_2 相同, 等等, n_r 相同的排列数是相等的, 这等于:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\dots n_r!}$$

定义 1.1 如果 $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$, 则定义: $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r}$ 为:

$$\binom{n}{n_1, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \dots n_r!}$$

因此, $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r}$ 表示吧 n 个不同的元素分成大小为 n_1, \dots, n_r 的 r 个不同组的组合数。

2 多项式定理

定理 2.1

$$(x_1 + \dots + x_r)^n = \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_r) \\ n_1 + \dots + n_r = n}} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r} \quad (2.1)$$

上式的求和号是对满足 $n_1 + \dots + n_r = n$ 的所有非负整数向量 (n_1, \dots, n_r) 求和。



证 我们知道 $(x_1 + \dots + x_r)^n$ 结果是 k 个元素之和, k 是 $n_1 + \dots + n_r = 0$ 具有非负整数解的个数。每个元素的是 n 次项。每一个 n 次项中的 x_1, x_2, \dots, x_r 的幂次之和是 n , 因此上述定理成立。 \square

3 淘汰赛场次问题

例 3.1 假设有 n 名选手进行淘汰赛, n 是 2^m 。这 n 名选手被分成 $n/2$ 组, 每组都要相互比赛, 每一场比赛的失败者将被淘汰而胜者进入下一轮, 这个过程持续到只有一名选手留下。假设我们有一场淘汰赛, 其中有 8 名选手。

1. 第一轮之后有多少种可能的结果?
2. 这场淘汰赛有多少种可能的结果? 其中每个结果包含了所有轮次的完整信息。

解答: 首先, 对于第一个问题, 我们把 8 个人分为 4 组, 每组 2 个这样的分法有 $\binom{8}{2,2,2,2} = \frac{8!}{2^4}$ 种分法, 然后, 当这四组没有顺序的差别时, $\frac{8!}{2^4 \times 4!}$ 种分法。对于比赛结果每一组都有两种所以一共有 $\frac{8! \times 2^4}{2^4 \times 4!} = \frac{8!}{4!}$

对于第一个问题, 我们还有另外的解法。首先选出 4 名胜利者一共有 $\binom{8}{4}$ 种方法, 然后为这四名胜利者配对一个失败者, 一共有 $4!$ 种方法。所以结合这两步, 一共有 $\binom{8}{4} \times 4! = \frac{8!}{4!}$ 种方法。

第二种方法是第一种方法的扩展, 则有: 第二轮的结果有 $\frac{4!}{2!}$, 第三轮的结果有 $\frac{2!}{1!}$, 所以一共有 $\frac{8!}{4!} \times \frac{4!}{2!} \times \frac{2!}{1!} = 8!$

我们可以进一步考虑, 是不是淘汰赛的结果和 $1, \dots, n$ 排列之间存在一一对应的关系, 所以结果才是 $n!$ 。我们可以这样理解, 对于淘汰赛而言其结果有一个排名, 从第 n 名到第 1 名, 所以一共有 $n!$ 种排名。

4 方程整数解个数

在上面多项式定理中, 对于多项式展开的和中元素个数 K , 我们没有给出一个解析解。现在我们尝试推出 K 的闭式解。假设 $n = n_1 + \dots + n_r$, 则要计算可能的非负整数向量 (n_1, \dots, n_r) , 我们考虑有 n 个连续的 0 排成一行:

$$0 \quad 0 \quad \dots \quad 0$$

从 $n - 1$ 个相邻的 0 的间隔中选出 $r - 1$ 个间隔的每一个方式对应等式:

$$n = n_1 + \dots + n_r$$



一个正整数解：令 n_1 等于第一个被选择的间隔之前的 0 的个数， x_2 等于第一个和第二被选择的间隔之间的 0 的个数，依次类推， n_r 等于最后一个被选的间隔后面的 0 的个数。于是：

定理 4.1 共有 $\binom{n-1}{r-1}$ 个不同的正整数向量 (n_1, n_2, \dots, n_r) 满足：

$$n_1 + n_2 + \dots + n_r = n, n_i > 0, i = 1, \dots, r \quad (4.1)$$

为了得到非负整数解的个数，注意 $x_1 + \dots + x_r = n$ 的非负整数解的个数和 $y_1 + \dots + y_r = n + r$ 的正整数解的个数是相同的（令 $y_i = x_i + 1, i = 1, \dots, r$ ），于是：

定理 4.2 共有 $\binom{n+r-1}{r-1}$ 个不同的非负整数向量 (x_1, \dots, x_r) 满足：

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = n \quad (4.2)$$

5 一个应用

我们再来讨论天线有效问题：有 n 个天线，其中 m 个是不可分辨的失效天线，令 $n - m$ 个天线也是不可分辨但是有效的。现在要求排成一排且没有相邻的两个失效天线的可能排列数。

我们可以假设 $n - m$ 个有效的天线排成一排，一共有 $n - m + 1$ 个间隔，根据题目要求每个间隔中最多放一根失效天线，所以问题就变成从 $n - m + 1$ 个间隔中找出 m 个位置放置失效天线。即有 $\binom{n-m+1}{m-1}$ 种天线排列方法。

另外我们还可以先把 m 个失效的天线排成一排，一共有 $m + 1$ 个间隔，我们要把这 $n - m$ 个有效天线放到 $m + 1$ 个间隔中。因此放置的天线排列数是

$$n_1 + \dots + n_{m+1} = n - m$$

的解的个数，满足 $n_1 \leq 0, n_i > 0, i = 2, \dots, m; x_{m+1} \leq 0$ 。令 $y_1 = x_1 + 1; y_i = x_i, i = 2, \dots, m; y_{m+1} = x_{m+1} + 1$ ，所以这个问题等于：

$$y_1 + \dots + y_{m+1} = n - m + 2 \quad (5.1)$$

的正整数向量的个数，因此一共有 $\binom{n-m+1}{m}$ 中方法，和我们之前得出的结果一样。

现在来考虑每两个失效天线之间至少有 2 个有效天线这种情况的排列数，结果为如下方程的解的个数：

$$x_1 + \dots + x_{m+1} = n - m, x_1 \leq 0; x_{m+1} \leq 0; x_i \geq 2, i = 2, \dots, m$$



令 $y_1 = x_1 + 1, y_{m+1} = x_{m+1} + 1; y_i = x_i - 1, i = 2, \dots, m$, 则问题变为:

$$y_1 + \dots + y_{m+1} = n - m + 2 - (m - 1)$$

有正整数解的个数。所以一共有 $\binom{n-2m+2}{m}$ 个天线配置方式。