排列组合分析

zcl.space

目录

本文介绍最简单的数数规则，这类的概率问题可难也可简单。我记得上高中的时候比较麻烦的一个问题是两盒火柴的问题，大意如下：两个火柴盒里面放火柴，然后随机抽取，问第n次以后恰好第一个盒子的火柴被抽光的概率。这类的问题需要掌握一些基本的规则，按照规则逐步计算会容易的多。

计数基本法则 如果一共有r个试验，试验1有n_1中结果，对于试验1的每一种可能，试验2都有n_2中结果，对于前两个试验的每一种可能的结果，试验3都有n_3种结果，依次类推，这r个试验一共有$n_1 n_2 \dots n_r$种结果。

排列 假设有n个互不相同的元素，则一共有$n!$个排列结果。如果这n个元素，其中n_1个彼此相同，另n_2个彼此相同，依次类推，n_r个也彼此相同，那么一共排列的个数为：

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!} \tag{0.1}$$

组合 一般来说，如果考虑顺序，从n个元素中取出r个排成一组，一共有$n(n-1)\dots(n-r+1)$种不同的方式，而每个包含r个元素的小组都被重复计算了$r!$次。所以从n个元素中取出r个组成不同组的数目为：

$$\frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \tag{0.2}$$

因此，如果不考虑顺序，$\binom{n}{r}$表示从n个元素中取出r个元素所组成的不同组的数目。

例 *0.1* 假设在一排n个天线中，有m个是失效的，另$n-m$个时有效的。假设所有有效天线不可区分，所有失效的天线之间也不可区分。为有多少中线性排列方式，使得任何两个失效的天线都不相邻？

解答： 把$n-m$个有效天线排一排。既然不允许连续两个失效天线在一起，那么这两个有效天线之间必然至多放置一个失效的。即在$n-m+1$的位置

中选择m个来放置，因此有$\binom{n-m+1}{m}$种放置方法。

一个非常有用的组合恒等式：

$$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r} \tag{0.3}$$

这个式子的证明可以从分析的角度来证明，也可以从组合的角度来证明。当然，从组合的角度来证明更能显示出这个式子的意义。设想从n个元素中取r个，一共有$\binom{n}{r}$种取法。从另一个角度来考虑，不妨假设这n个元素里有一个特殊的，记为元素1，那么取r个元素就有两种结果：取元素1或者不取1。取元素1时，一共有$\binom{n-1}{r-1}$中方法；不取元素1时，一共有$\binom{n-1}{r}$。两者之和就是从n个元素里取r个的方法直和，而从n个元素中取r个共有$\binom{n}{r}$。

$\binom{n}{r}$经常成为二项式系数，因为他们是二项式定理中重要的系数。接下来用两种方法证明二项式定理

定理 *0.1*

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} \tag{0.4}$$

证 首先我们用数学归纳法来证明。

当$n=1$时，$x+y=\binom{1}{0}x^0y^1+\binom{1}{1}x^1y^0=y+x$ 假设式 (0.4) 对于$n-1$成立,那么对于n:

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= (x+y)^{n-1}(x+y) && (0.5)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}x^i y^{n-1-i}(x+y) && (0.6)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}x^{i+1}y^{n-1-i}+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}x^i y^{n-i} && (0.7)
\end{aligned}$$

对于上式右端第一项令$k=1+i$，右端第二项令$i=k$，则：

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}x^{i+1}y^{n-1-i}+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}x^iy^{n-i} && (0.8)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^ky^{n-k}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^ky^{n-k} && (0.9)\\
&= x^n+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}x^ky^{n-k}+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^ky^{n-k}+y^n && (0.10)\\
&= x^n+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}\right)x^ky^{n-k}+y^n && (0.11)\\
&= x^n+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}+y^n && (0.12)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k} && (0.13)
\end{aligned}
$$

□

证　接下来给出另外一种证明方法。考虑乘积：

$$(x_1+y_1)\dots(x_n+y_n) \tag{0.14}$$

它展开后包括2^n个求和项，每一项都是n个因子的乘积，而且每一项都包含因子x_i或者y_i，$i=1,\dots,n$，例如：

$$(x_1+y_1)(x_2+y_2)=x_1x_2+x_1y_2+y_1x_2+y_1y_2$$

这2^n个求和项中，一共有多少项含有k个x相关的因子，多少项含有$n-k$个y相关的因子？含有k个x相关因子和$n-k$个y相关因子的每一项对应从n个元素$x_1,\dots,x_n$取k个元素组成一组的取法，因此一共有$\binom{n}{k}$中取法。这样令$x_i=x,y_i=y,i=i,\dots,n$，可以看出：

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k} \tag{0.15}$$

□

例 *0.2*　一个含有n个元素的集合一共有多少子集？

解答：　第一种解法：含有k个元素的集合一共有$\binom{n}{k}$个，因此所求答案是：

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=(1+1)^n=2^n$$

第二种解法：把这n个元素排成一排，对于某个元素，可以包含于一个集合也可以不包含于这个集合。包含于某集合记为*1*，不包含于该集合记为*0*，则这样互不相同的二进制序列一共有2^n个。其对应了这n个元素的2^n个子集。