指数分布

zcl.space

目录

1 定义

如果一个连续性随机变量的密度函数如下：$\forall\lambda > 0$，有：

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

则称该随机变量是参数为λ的指数分布。指数随机变量的分布函数$F(a)$如下：

$$F(a) = P\{x \leq a\} = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda a}, a \geq 0 \tag{1.2}$$

2 期望和方差

令X是一参数为λ的指数随机变量，则$\mathbb{E}[X]$和$\mathrm{Var}[X]$的计算如下：

$$\mathbb{E}[X^n] = \int_0^\infty x^n \lambda e^{-\lambda x} dx \tag{2.1}$$

利用分部积分我们可以得到：

$$\mathbb{E}[X^n] = \frac{n}{\lambda}\mathbb{E}[X^{n-1}] \tag{2.2}$$

令$n=1$则有：

$$\mathbb{E}[X]=\frac{1}{\lambda} \tag{2.3}$$

令$n=2$则有：

$$\mathbb{E}[X^2]=\frac{2}{\lambda^2} \tag{2.4}$$

因此：$\mathrm{Var}[X]=\frac{1}{\lambda^2}$ 即指数分布的期望恰好等于参数λ的倒数，而方差等于期望的平方。

在实际生活中，指数分布通常用来描述某个时间发生的等待时间的分布，例如地震发生的时间间隔；一场战争发生的时间间隔；从现在开始到你接到下一个误拨的电话的时间间隔。

3 永远年轻的分布

我们称一个非负随机变量X是无记忆的，如果：

$$P\{X>s+t|X>t\}=P\{X>s\} \tag{3.1}$$

设X是某个设备的寿命，上式说明在已知该设备已经使用t小时的条件下寿命至少为$s+t$的概率与开始时寿命至少为s小时的概率是一样的。换句话说，如果该设备在使用t小时后还能使用，那么剩余的寿命同一开始时的寿命的分布是一样的。就好像该设备对已经使用了t小时是无记忆似的。

式 (3.1)等效于：

$$\frac{P\{X>s+t,X>t\}}{P\{X>t\}}=P\{X>s\} \tag{3.2}$$

可以验证指数分布就是这样的无记忆分布。指数分布也叫作永远年轻的分布。