几何分布

zcl.space

目录

1 几何随机变量

考虑独立重复试验，每次成功的概率为$p, 0 < p < 1$，重复试验直到试验首次成功为止。如果令X表示需要试验的次数，那么：

$$P\{X = n\} = (1-p)^{n-1}p, \qquad n = 1, 2, \dots \tag{1.1}$$

由于：

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{X = n\} = p\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{n-1} = \frac{p}{1-(1-p)} = 1 \tag{1.2}$$

这说明最终会成功的概率是1，若随机变量的分布列由 (1.1)给出，则称该随机变量是参数为p的几何随机变量。

2 几何随机变量的期望和方差

首先我们计算几何随机变量的期望，令$q=1-p$，有：

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{i=1}^{\infty} i q^{i-1} p && (2.1)\\
&= \sum_{i=1}^{\infty} (i-1+1) q^{i-1} p && (2.2)\\
&= \sum_{i=1}^{\infty} (i-1) q^{i-1} p + \sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1} p && (2.3)\\
&= q \sum_{j=0}^{\infty} j q^{j-1} p + 1 && (2.4)\\
&= qE[X] + 1 && (2.5)
\end{aligned}
$$

因此：

$$E[X] = \frac{1}{p}$$

一个成功概率为p的试验，如果独立重复进行直到饰演陈宫，那么需要进行的试验的期望次数邓毅$\frac{1}{p}$。掷一枚均匀的骰子，直到出现一次点数为1，需要的期望次数为6.

然后我们计算几何随机变量的方差。首先计算$E[X^2]$，有：

$$
\begin{aligned}
E[X^2] &= \sum_{i=1}^{\infty} i^2 q^{i-1} p && (2.6)\\
&= \sum_{i=1}^{\infty} (i-1+1)^2 q^{i-1} p && (2.7)\\
&= \sum_{i=1}^{\infty} (i-1)^2 q^{i-1} p + \sum_{i=1}^{\infty} 2(i-1) q^{i-1} p + \sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1} p && (2.8)\\
&= \sum_{j=0}^{\infty} j^2 q^j p + 2 \sum_{j=1}^{\infty} j q^j p + 1 && (2.9)\\
&= qE[X^2] + 2qE[X] + 1 && (2.10)
\end{aligned}
$$

结合$E[X]=1/p$，我们可以得到：

$$pE[X^2] = \frac{2q}{p} + 1 \tag{2.11}$$

因此：

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{q+1}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} \tag{2.12}$$

3 一个例子

每一个概率分布都有其现实中的例子。接下来给出一个几何随机变量的例子。

问题 3.1

一个坛子中有N个白球和M个黑球，每次从中抽取一个球，观察球的颜色并放回，重复这个过程，直到取出一个黑球，求以下事件的概率：

1. 恰好取球n次。
2. 至少取球k次。

解答： 3.1

如果我们令X表示要取出一个黑球需要的取球次数，则X满足 (1.1)且$p = \frac{M}{N+M}$。所以：

$$P\{X=n\} = (\frac{N}{M+N})^{n-1}\frac{M}{M+N} = \frac{MN^{n-1}}{(M+N)^n} \tag{3.1}$$

对于第二个问题，

$$P\{X \geq k\} = \frac{M}{M+N}\sum_{n=k}^{\infty}\left(\frac{N}{M+N}\right)^{n-1} = \left(\frac{N}{M+N}\right)^{k-1} \tag{3.2}$$

式 (3.2)的结果可以直接得到，因为至少需要k次取球意味着前$k-1$次拿到的都是白球，即前$k-1$次试验都失败。故对于一个服从几何分布的随机变量X,有：

$$P\{X \geq k\} = (1-p)^{k-1} \tag{3.3}$$