通信系统中的随机过程

zcl.space

在 一维随机游动 的例子中，我们讨论了参数离散取值离散的随机过程，今天，给出一个参数连续取值离散的随机过程。

问题 设有一个脉冲数字通信系统，它传送的信号是脉冲宽度为T_0的脉冲信号，每隔T_0送出一个脉冲。脉冲幅度$\xi(t)$是一个随机变量，它可取四个值$\{-2,-1,1,2\}$，且取这四个值的概率是相同的，即：

$$
\begin{aligned}
P(\xi(t)=2) &= P(\xi(t)=1) \\
&= P(\xi(t)=-1) \\
&= P(\xi(t)=-2) \\
&= 1/4
\end{aligned}
$$

不同周期内脉冲幅度是相互统计独立的，脉冲的起始时间相对于原点$t=0$的时间差u为均匀分布在$0,T_0$内的随机变量。试求在两个时刻t_1,t_2该随机过程$\xi(t)$所取值$\xi(t_1),\xi(t_2)$的二维联合概率密度。

解答: 首先，给出一个该脉冲数字通信数字信号的一个典型样本函数。如图1所示

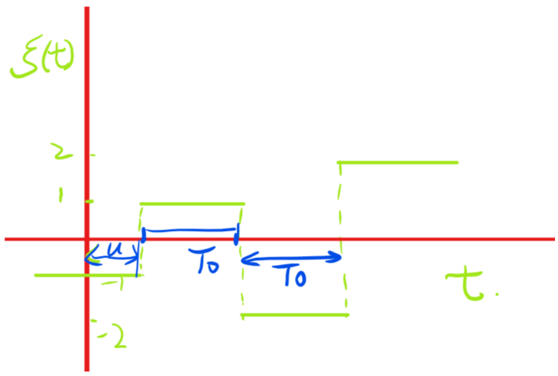

图 1: 脉冲信号的典型样本函数

在时间轴上固定两个时刻t_1,t_2。首先要研究的问题时t_1,t_2是否处于一个脉

冲内。设事件c表示t_1,t_2处于不同的脉冲，它的逆事件c^c表示t_1,t_2处于同一脉冲周期内。

当$|t_1-t_2|>T_0$时，事件c是必然事件，此时，$P(c)=1,P(c^c)=0,;$

当$|t_1-t_2|\leq T_0$时，t_1,t_2有可能在同一脉冲内，也有可能处于两个不同的脉冲内。设θ为t_1所在的脉冲的起始时刻。由于脉冲的起始时间相对于原点$t=0$的时间差u均匀分布于$(0,T_0)$内，而且该信号为等脉宽的脉冲信号，脉宽均匀为T_0。则θ也是均匀分布的随机变量，θ可视为均匀分布于$[t_1-T_0,t_1]$内的随机变量。图2给出了θ的概率密度和t_1,t_2,θ的关系图。

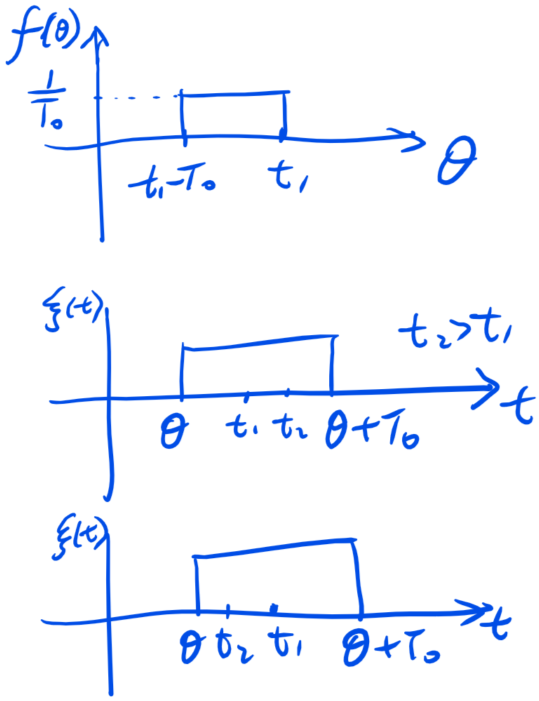

图 2: t_1,t_2,θ关系图

如果$t_1<t_2$，则：

$$\begin{aligned}P(c^c) &= P(t_2<\theta+T_0)=P(\theta>t_2-T_0) && (0.1)\\ &= 1-P(\theta<t_2-T_0) && (0.2)\\ &= 1-\frac{1}{T_0}\int_{t_1-T_0}^{t_2-T_0} d\theta && (0.3)\\ &= 1-\frac{t_2-t_1}{T_0} && (0.4)\end{aligned}$$

如果$t_2 < t_1$ ，则：

$$P(c^c) = P(t_2 > \theta) = \frac{1}{T_0}\int_{t_1-T_0}^{t_2} d\theta \tag{0.5}$$

$$= 1 - \frac{t_1 - t_2}{T_0} \tag{0.6}$$

因此：

$$P(c^c) = 1 - \frac{|t_1 - t_2|}{T_0} \tag{0.7}$$

$$P(c) = \frac{|t_1 - t_2|}{T_0} \tag{0.8}$$

根据全概率公式：

$$f_{\xi_{t_1},\xi_{t_2}}(x_1, x_2) = f_{\xi_{t_1},\xi_{t_2},c}(x_1, x_2|c)P(c) + f_{\xi_{t_1},\xi_{t_2},c^c}(x_1, x_2|c^c)P(c^c) \tag{0.9}$$

又因为不同周期内脉冲幅度是相互统计独立的随机变量，于是：

$$f_{\xi_{t_1},\xi_{t_2},c}(x_1, x_2|c) = \sum_{i=\{-2,-1,1,2\}} \frac{1}{4}\delta(x_1 - i) \sum_{k=\{-2,-1,1,2\}} \frac{1}{4}\delta(x_2 - k) \tag{0.10}$$

如果t_1, t_2处于同一周期，则$\xi(t_1 = \xi(t_2))$，这时:

$$f_{\xi_{t_1},\xi_{t_2}|c^c} = \sum_{i=\{-2,-1,1,2\}} \frac{1}{4}\delta(x_1 - i)\delta(x_2 - i) \tag{0.11}$$

综上有：当$|t_1 - t_2| \leq T_0$时：

$$f_{\xi_{t_1},\xi_{t_2}}(x_1, x_2) = \sum_{i=\{-2,-1,1,2\}} \frac{1}{4}\delta(x_1 - i) \sum_{k=\{-2,-1,1,2\}} \frac{1}{4}\delta(x_2 - k)\frac{|t_1 - t_2|}{T_0} \tag{0.12}$$

$$+ \sum_{i=\{-2,-1,1,2\}} \frac{1}{4}\delta(x_1 - i)\delta(x_2 - i)(1 - \frac{|t_1 - t_2|}{T_0}) \tag{0.13}$$

当$|t_1 - t_2| \geq T_0$时：

$$f_{\xi_{t_1},\xi_{t_2}}(x_1, x_2) = \sum_{i=\{-2,-1,1,2\}} \frac{1}{4}\delta(x_1 - i) \sum_{k=\{-2,-1,1,2\}} \frac{1}{4}\delta(x_2 - k) \tag{0.14}$$